

Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

No se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

Duración: 60 minutos

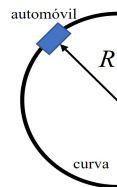
Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

Primera parte

1.- Obtener el resultado de $(\mathbf{a} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{i} + (\mathbf{a} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} + (\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k}$ siendo \mathbf{a} un vector cuyas componentes en un sistema de referencia cartesiano son (a_x, a_y, a_z) . (1 punto)

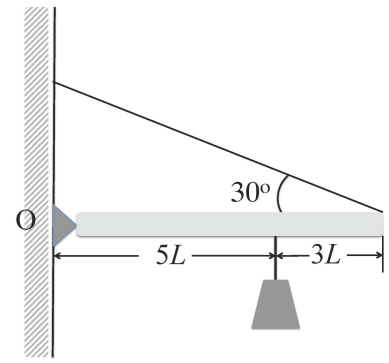
2.- Un punto describe en su movimiento la trayectoria en coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x(t) = 3R\omega t \\ y(t) = R[1 + \cos(\omega t)] \end{cases}$
siendo ω y R constantes. Determinar el radio de curvatura en el instante $t = \frac{2\pi}{\omega}$. (1,5 puntos)

3.- Un automóvil de masa m toma una curva circular sin peraltar de radio R . Si el coeficiente de rozamiento entre la carretera y el vehículo es μ , determinar la expresión de la velocidad máxima con la que el conductor puede tomar la curva sin derrapar. Se considera el automóvil como un punto material. (1 punto)

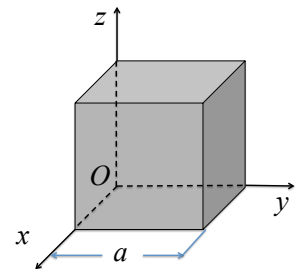


4.- Un niño empuja horizontalmente una caja puntual de masa m una distancia d sobre una superficie horizontal rugosa, con velocidad constante. El coeficiente de rozamiento dinámico es μ . Determinar el trabajo total efectuado sobre la caja. (1 punto)

5.- Un barra de peso P y longitud $8L$ se encuentra apoyada en su extremo O y soporta una carga de 100 N en la posición indicada. Su otro extremo está sujeto por un cable de masa despreciable que forma un ángulo de 30° . Determinar la tensión T del mismo y las componentes de la reacción en el apoyo fijo O . (2 puntos)

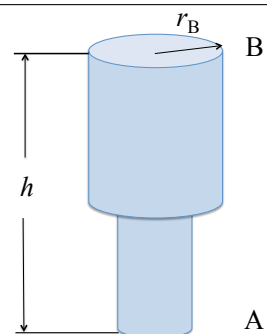


6.- Un cubo de arista a tiene una masa m distribuida homogéneamente. Determinar, sabiendo que su momento de inercia respecto al plano xy es $I_{xy} = \frac{1}{3}ma^2$, sus momentos de inercia respecto al punto O y respecto a su centro de masas. (1 punto)



7.- Un sistema material formado por tres masas puntuales $m_1 = 1\text{ kg}$, $m_2 = 2\text{ kg}$ y $m_3 = 3\text{ kg}$, se encuentra en movimiento. Los vectores de posición de las partículas, expresados en metros, son $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = 2t^3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. Determinar en función del tiempo la expresión vectorial de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, expresada en N. (1,5 puntos)

8.- Del punto A al punto B de la tubería de la figura fluye agua a 10° C con una velocidad v_A . La densidad del agua es ρ . Si el radio de la sección B de la tubería es el doble que el radio de la sección A y la presión en el punto A es p_A , calcular la presión en B , p_B . (1 punto)



Apellidos: _____ Nombre: _____ N° Matrícula: _____

No se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

Duración: 60 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

Primera parte

1.- Obtener el resultado de $(\mathbf{a} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{i} + (\mathbf{a} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} + (\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k}$ siendo \mathbf{a} un vector cuyas componentes en un sistema de referencia cartesiano son (a_x, a_y, a_z) . (1 punto)

Aplicando la definición del doble producto vectorial a cada uno de los sumandos:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{i} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} - \mathbf{a} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j})\mathbf{a} = a_y \mathbf{j} - \mathbf{a} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{a} = a_z \mathbf{k} - \mathbf{a} \end{aligned} \right\} \text{sumando } \mathbf{a} - 3\mathbf{a} = -2\mathbf{a} \quad \boxed{-2\mathbf{a}}$$

2.- Un punto describe en su movimiento la trayectoria en coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x(t) = 3R\omega t \\ y(t) = R[1 + \cos(\omega t)] \end{cases}$

siendo ω y R constantes. Determinar el radio de curvatura en el instante $t = \frac{2\pi}{\omega}$. (1,5 puntos)

Derivando las ecuaciones de la trayectoria se obtienen las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración,

$$\begin{cases} x(t) = 3R\omega t \\ y(t) = R[1 + \cos(\omega t)] \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = 3R\omega \\ \dot{y}(t) = -R\omega \sin(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

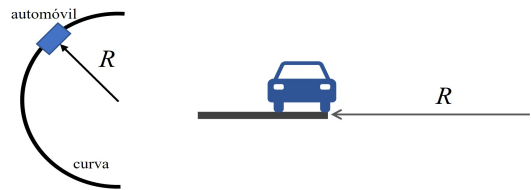
Particularizando las componentes de la velocidad y la aceleración para $t = \frac{2\pi}{\omega}$ s:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3R\omega \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -R\omega^2 \end{cases} \quad \text{se observa que el módulo de la velocidad es constante, } |\mathbf{v}| = 3R\omega$$

y, por tanto, la aceleración tangencial es nula. La aceleración normal coincide con el módulo de la aceleración.

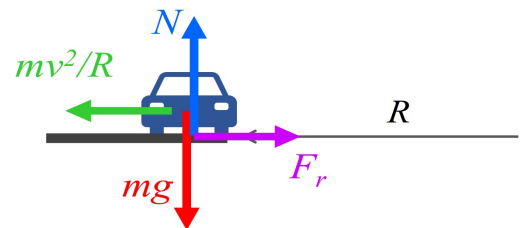
$$\text{El radio de curvatura } \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{9R^2\omega^2}{R\omega^2} = 9R \quad \boxed{\rho = 9R}$$

3.- Un automóvil de masa m toma una curva circular sin peraltar de radio R . Si el coeficiente de rozamiento entre la carretera y el vehículo es μ , determinar la expresión de la velocidad máxima con la que el conductor puede tomar la curva sin derrapar. Se considera el automóvil como un punto material. (1 punto)



Cuando un coche describe una curva con velocidad v tiende a salirse de ella al actuar sobre él una fuerza de inercia dada por $\frac{mv^2}{R}$. Esta fuerza le haría deslizar y desplazarse hacia el exterior de la curva si no estuviera contrarrestada por una fuerza de rozamiento estático asociada a la adherencia del vehículo con la carretera.

En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre el vehículo. Aplicando la segunda ley de Newton, descomponiendo según la dirección radial y una perpendicular al plano de la carretera e imponiendo la condición de que la aceleración radial sea nula para que no deslice hacia el exterior de la curva, se tiene:



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} ma_{\text{radial}} = F_r - \frac{mv^2}{R} = 0 \\ 0 = N - mg \end{cases} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{mv^2}{R} = F_r = \mu N \\ N = mg \end{aligned} \right\} \quad \frac{mv^2}{R} = \mu mg \quad \boxed{v = \sqrt{\mu g R}}$$

4.- Un niño empuja horizontalmente una caja puntual de masa m una distancia d sobre una superficie horizontal rugosa, con velocidad constante. El coeficiente de rozamiento dinámico es μ . Determinar el trabajo total efectuado sobre la caja. (1 punto)

Al moverse con velocidad constante no hay variación de energía cinética y el trabajo total será nulo

$$\boxed{W = 0}$$

Se recuerda que el teorema de la energía cinética establece: $\Delta E_c = W$

5.- Un barra de peso P y longitud $8L$ se encuentra apoyada en su extremo O y soporta una carga de 100 N en la posición indicada. Su otro extremo está sujeto por un cable de masa despreciable que forma un ángulo de 30° . Determinar la tensión T del mismo y las componentes de la reacción en el apoyo fijo O . (2 puntos)

Escogiendo una referencia cartesiana, dibujando el diagrama del cuerpo libre y aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ox} - T \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow R_{Ox} = \frac{\sqrt{3}}{2}T$$

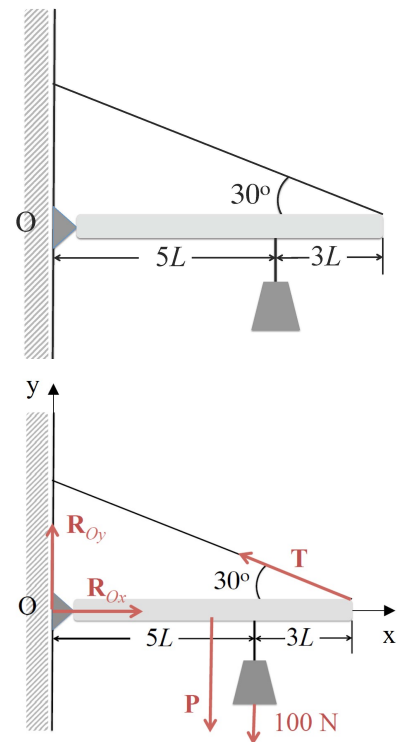
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Oy} - P - 100 + T \sin 30^\circ = 0$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow -4LP - 5L \cdot 100 + 8LT \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{T = P + 125}$$

Las componentes de la reacción en O :

$$\boxed{R_{Ox} = \frac{\sqrt{3}(P + 125)}{2}}$$

$$\boxed{R_{Oy} = \frac{1}{2}(P + 75)}$$

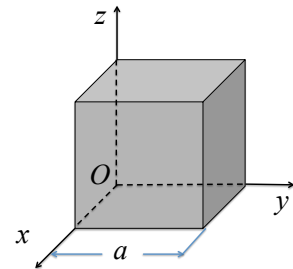


6.- Un cubo de arista a tiene una masa m distribuida homogéneamente. Determinar, sabiendo que su momento de inercia respecto al plano xy es $I_{xy} = \frac{1}{3}ma^2$, su momento de inercia respecto al punto O y respecto a su centro de masas. (1 punto)

Respecto al punto O : $I_O = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz} = 3I_{xy} = ma^2$ $\boxed{I_O = ma^2}$

Aplicando el teorema de Steiner se puede determinar el momento de inercia del cubo respecto a su centro de masas, teniendo en cuenta que la posición del centro de masas es $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, así

$$I_O = I_C + m|\mathbf{OC}|^2 \Rightarrow I_C = ma^2 - \frac{3}{4}ma^2 = \frac{1}{4}ma^2$$
 $\boxed{I_C = \frac{1}{4}ma^2}$



Un sistema material formado por tres masas puntuales $m_1 = 1\text{ kg}$, $m_2 = 2\text{ kg}$ y $m_3 = 3\text{ kg}$, se encuentra en movimiento. Los vectores de posición de las partículas, expresados en metros, son $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = 2t^3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. Determinar en función del tiempo la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, expresada en N. (1,5 puntos)

La fuerza se puede determinar a partir del teorema del centro de masas: $\mathbf{F} = M\mathbf{a}_C$ siendo \mathbf{a}_C la aceleración del centro de masas, que se puede determinar a partir del vector de posición del centro de masas como $\mathbf{a}_C = \frac{d^2\mathbf{OC}}{dt^2}$

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{(t^2 + 4t^3)\mathbf{i} + 7t\mathbf{j} - 8t\mathbf{k}}{6} \Rightarrow \mathbf{v}_C = \frac{(2t + 12t^2)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}}{6} \Rightarrow \mathbf{a}_C = \frac{(2 + 24t)\mathbf{i}}{6}$$

La fuerza: $\mathbf{F} = M\mathbf{a}_C = 6 \frac{(2 + 24t)\mathbf{i}}{6}$

$$\boxed{\mathbf{F} = (2 + 24t)\mathbf{i}}$$

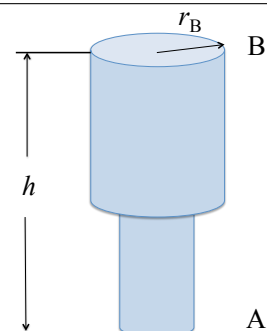
8.- Del punto A al punto B de la tubería de la figura fluye agua a 10° C con una velocidad v_A . La densidad del agua es ρ . Si el radio de la sección B de la tubería es el doble que el radio de la sección A y la presión en el punto A es p_A , calcular la presión en B , p_B . (1 punto)

Aplicando el teorema de Bernoulli: $p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gh_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho gh_B$

De la ecuación de continuidad se tiene: $S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_A = 4v_B$

Teniendo en cuenta que $h_A = 0$:

$$\boxed{p_B = p_A + \frac{15}{32}\rho v_A^2 - \rho gh}$$



Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

Se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

Duración: 90 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

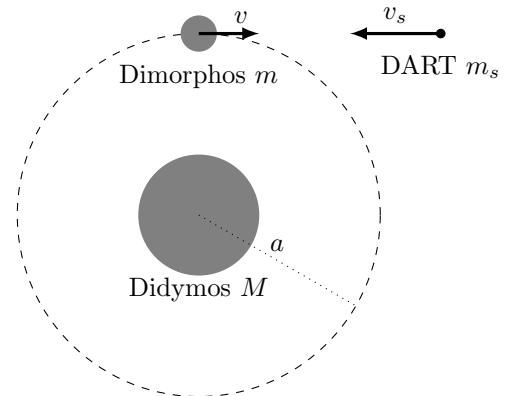
Segunda parte - Problema 1

El 26 de septiembre de 2022 la sonda DART impactó contra el asteroide Dimorphos en la primera misión espacial de defensa planetaria utilizando la estrategia de *impacto cinético* para modificar la órbita de un cuerpo celeste potencialmente peligroso para la Tierra. Dimorphos forma parte de un sistema binario y es el satélite de otro asteroide, Didymos. Se conoce el periodo de revolución de Dimorphos en torno a Didymos, $T = 11,92$ horas; el radio de la órbita de Dimorphos, que se puede considerar circular, $a = 1,2$ km; la masa de Dimorphos, $m = 4,8 \cdot 10^9$ kg; y la masa de Didymos, M , que es tal que el producto de la constante de la gravitación universal por esa masa vale $GM = 37 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

Recomendación: Obtener en todos los apartados una expresión literal para el resultado pedido en función de los datos del problema y a continuación calcular el resultado numérico con dos cifras significativas.

Nota: Se recuerda la tercera ley de Kepler, $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$ y que para toda órbita circular o elíptica, la energía total es

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$$



a) Calcular la velocidad orbital de Dimorphos antes del impacto, v , expresada en m/s. (0,5 puntos)

b) Obtener la energía total de Dimorphos en su órbita circular antes del impacto, E , expresada en J. (0,5 puntos)

El objetivo de la sonda DART era impactar contra Dimorphos de forma que se obtuviera la mayor variación posible de la velocidad de Dimorphos. En este problema, como se muestra en la figura, se va a considerar el impacto como una colisión completamente inelástica frontal y unidimensional en la que después del impacto la sonda DART queda incrustada en Dimorphos. Se conoce la masa de DART, $m_s = 570$ kg y su velocidad antes del impacto $v_s = 6,6$ km/s. La masa de DART es mucho menor que la de Dimorphos, luego se puede tomar $m_s + m \approx m$ siempre que sea necesario. Tras el impacto, Dimorphos sigue su órbita con unos parámetros ligeramente distintos: velocidad v' , energía E' , semieje mayor a' y periodo T' . Se pide:

c) Determinar la variación de la velocidad de Dimorphos debida al impacto, $\Delta v = v' - v$, expresada en m/s. (1 punto)

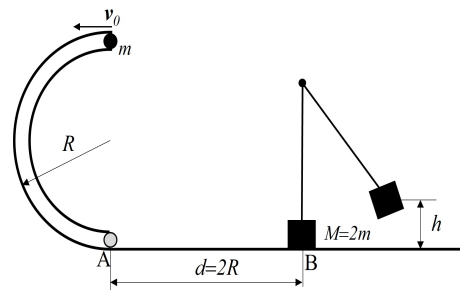
d) Hallar la variación de la energía de Dimorphos, $\Delta E = E' - E$, en el impacto, expresada en J. [Ayuda: Justo después del impacto no ha cambiado la posición de Dimorphos. Se puede considerar $mv \gg m_s v_s$] (1 punto)

e) Calcular la variación, $\Delta a = a' - a$, del semieje mayor de la órbita de Dimorphos, expresada en metros. (1 punto)

f) Obtener la variación del periodo de revolución de Dimorphos , $\Delta T = T' - T$, expresada en minutos. (1 punto)

Segunda parte - Problema 2

En un juego de canicas infantil se dispone de un carril semicircular sin rozamiento en su interior por donde se desplaza una canica de masa m que consideraremos puntual. Cuando la canica sale del carril semicircular, atraviesa un carril rectilíneo de longitud $d = 2R$ y coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,5$, chocando en el punto B con un bloque puntual de masa $M = 2m$ suspendido de una cuerda como se muestra en la figura e inicialmente en reposo. Cuando la canica se introduce en el carril semicircular con una velocidad inicial v_0 , determinar:



a) La velocidad de la canica en el punto A, v_A . (1 punto)

b) La velocidad de la canica en el punto B, v_B . (1 punto)

c) Cuando la canica choca elásticamente con el bloque, determinar las velocidades de la canica y el bloque posteriores a la colisión, v'_B y u' , respectivamente. Se recuerda que el coeficiente de restitución en un choque frontal elástico es $C_r = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = 1$ (2 puntos)

d) La altura máxima h que alcanzará el bloque de masa M tras la colisión. (1 punto)

Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

Se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

Duración: 90 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

Segunda parte - Problema 1

El 26 de septiembre de 2022 la sonda DART impactó contra el asteroide Dimorphos en la primera misión espacial de defensa planetaria utilizando la estrategia de *impacto cinético* para modificar la órbita de un cuerpo celeste potencialmente peligroso para la Tierra. Dimorphos forma parte de un sistema binario y es el satélite de otro asteroide, Didymos. Se conoce el periodo de revolución de Dimorphos en torno a Didymos, $T = 11,92$ horas; el radio de la órbita de Dimorphos, que se puede considerar circular, $a = 1,2$ km; la masa de Dimorphos, $m = 4,8 \cdot 10^9$ kg; y la masa de Didymos, M , que es tal que el producto de la constante de la gravitación universal por esa masa vale $GM = 37 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

Recomendación: Obtener en todos los apartados una expresión literal para el resultado pedido en función de los datos del problema y a continuación calcular el resultado numérico con dos cifras significativas.

Nota: Se recuerda la tercera ley de Kepler, $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$ y que para toda órbita circular o elíptica, la energía total es

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$$

a) Calcular la velocidad orbital de Dimorphos antes del impacto, v , expresada en m/s. (0,5 puntos)

En una órbita circular $m \frac{v^2}{a} = G \frac{Mm}{a^2}$, despejando $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$

$$v = 0,18 \text{ m/s}$$

b) Obtener la energía total de Dimorphos en su órbita circular antes del impacto, E , expresada en J. (0,5 puntos)

De la expresión de la energía total dada en el enunciado: $E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$

$$E = -7,4 \cdot 10^7 \text{ J}$$

También se puede obtener como suma de las energías cinética y potencial $E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{a}$ y sustituir la expresión de la velocidad obtenida en el apartado 1.

El objetivo de la sonda DART era impactar contra Dimorphos de forma que se obtuviera la mayor variación posible de la velocidad de Dimorphos. En este problema, como se muestra en la figura, se va a considerar el impacto como una colisión completamente inelástica frontal y unidimensional en la que después del impacto la sonda DART queda incrustada en Dimorphos. Se conoce la masa de DART, $m_s = 570$ kg y su velocidad antes del impacto $v_s = 6,6$ km/s. La masa de DART es mucho menor que la de Dimorphos, luego se puede tomar $m_s + m \approx m$ siempre que sea necesario. Tras el impacto, Dimorphos sigue su órbita con unos parámetros ligeramente distintos: velocidad v' , semieje mayor a' y periodo T' . Se pide:

c) Determinar la variación de la velocidad de Dimorphos debida al impacto, $\Delta v = v' - v$, expresada en m/s. (1 punto)

En la colisión se conserva el momento lineal: $mv - m_s v_s = (m + m_s) v'$. Como $m + m_s \approx m$ resulta:

$$v' = v - \frac{m_s v_s}{m} \implies \Delta v = v' - v = -\frac{m_s v_s}{m}$$

$$\Delta v = -7,8 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

d) Hallar la variación de la energía de Dimorphos, $\Delta E = E' - E$, en el impacto, expresada en J. [Ayuda: Justo después del impacto no ha cambiado la posición de Dimorphos. Se puede considerar $mv \gg m_s v_s$] (1 punto)

La energía de Dimorphos justo después del impacto será $E' = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{GMm}{a}$, ya que no cambia su posición.

Por tanto, $\Delta E = E' - E$ se puede escribir como $\Delta E = \frac{m_s v_s}{2m} (m_s v_s - 2mv)$. Y con la aproximación indicada en el enunciado resulta:

$$\Delta E = -m_s v_s v$$

$$\Delta E = -6,6 \cdot 10^5 \text{ J}$$

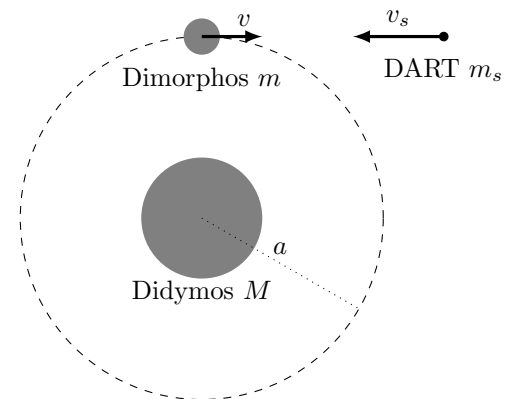
e) Calcular la variación, $\Delta a = a' - a$, del semieje mayor de la órbita de Dimorphos, expresada en metros. (1 punto)

Se puede obtener el resultado pedido mediante dos procedimientos:

e.1) Como $E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$ se puede calcular a' conocido E' , o bien directamente

$$\Delta a = a' - a = -\frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = -\frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{\Delta E + E} - \frac{1}{E} \right)$$

$$\Delta a = -11 \text{ m}$$



e.2) Pero también la derivada de E se puede escribir como $\frac{dE}{da} = \frac{GMm}{2a^2} = -\frac{E}{a}$. Para variaciones pequeñas $\frac{dE}{da} \approx \frac{\Delta E}{\Delta a}$ y por tanto $\Delta a = -\frac{\Delta E}{E}a$. Con el resultado del apartado d) se puede escribir:

$$\Delta a = -\frac{2a^2}{GM} \frac{m_s v_s}{m} v = -\frac{2a^2}{GM} \frac{m_s v_s}{m} \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \boxed{\Delta a = -11 \text{ m}}$$

f) Obtener la variación del periodo de revolución de Dimorphos, $\Delta T = T' - T$, expresada en minutos. (1 punto)

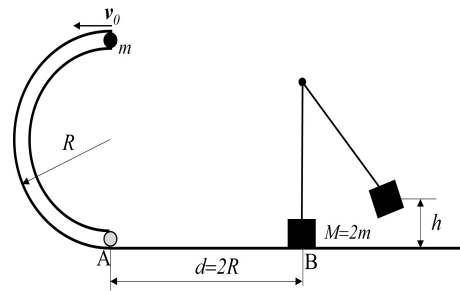
A partir de la tercera ley de Kepler, conocidos T , a , y a' se puede calcular $T' = T \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}$ y con los resultados anteriores se obtiene:

$$\boxed{\Delta T = -573 \text{ s} \approx -9.5 \text{ min}}$$

Tras el impacto de DART se ha medido el nuevo periodo de Dimorphos y se ha obtenido una variación aproximada de -32 minutos, lo que confirma un factor multiplicativo aproximadamente igual a 3 por el efecto del material eyectado y demuestra la viabilidad de la estrategia para la defensa de la Tierra frente a posibles impactos de asteroides.

Segunda parte - Problema 2

En un juego de canicas infantil se dispone de un carril semicircular sin rozamiento en su interior por donde se desplaza una canica de masa m que consideraremos puntual. Cuando la canica sale del carril semicircular, atraviesa un carril rectilíneo de longitud $d = 2R$ y coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,5$, chocando en el punto B con un bloque puntual de masa $M = 2m$ suspendido de una cuerda como se muestra en la figura e inicialmente en reposo. Cuando la canica se introduce en el carril semicircular con una velocidad inicial v_0 , determinar:



a) La velocidad de la canica en el punto A, v_A . (1 punto)

En el carril semicircular no existe rozamiento por tanto la energía mecánica de la canica se conserva:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgd = \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 + 2gd} \quad \boxed{v_A = \sqrt{v_0^2 + 4gR}}$$

b) La velocidad de la canica en el punto B, v_B . (1 punto)

Como en el carril rectilíneo existe rozamiento, la energía mecánica no se conserva. Aplicando el teorema de energía cinética: $\Delta E_c = W$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\mu mgd \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 4gR - 2\mu gd} = \sqrt{v_0^2 + 2gR} \quad \boxed{v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gR}}$$

c) Cuando la canica choca elásticamente con el bloque, determinar las velocidades de la canica y el bloque posteriores a la colisión, v'_B y u' , respectivamente. Se recuerda que el coeficiente de restitución en un choque frontal elástico es

$$C_r = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = 1 \quad (2 \text{ puntos})$$

Para determinar las velocidades pedidas se hace uso de la conservación del momento lineal y del coeficiente de restitución:

$$\left. \begin{aligned} m v_B &= m v'_B + M u' \Rightarrow v_B = v'_B + 2u' \\ 1 &= -\frac{v'_B - u'}{v_B} \Rightarrow v_B = -v'_B + u' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u' &= \frac{2}{3} v_B \\ v'_B &= -\frac{1}{3} v_B \end{aligned} \quad \boxed{u' = \frac{2}{3} \sqrt{v_0^2 + 2gR}} \\ \boxed{v'_B = -\frac{1}{3} \sqrt{v_0^2 + 2gR}}$$

Al ser el choque elástico, también se pueden obtener las velocidades a partir de la combinación de las ecuaciones de conservación del momento lineal y de la energía cinética, siendo este procedimiento más laborioso.

d) La altura máxima h que alcanzará el bloque de masa M tras la colisión. (1 punto)

Después del choque la energía mecánica del bloque se conserva:

$$\frac{1}{2} M u'^2 = Mgh \Rightarrow h = \frac{1}{2g} u'^2 = \frac{1}{2g} \frac{4}{9} (v_0^2 + 2gR) \quad \boxed{h = \frac{2}{9g} (v_0^2 + 2gR)}$$

Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

Se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

Duración: 60 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

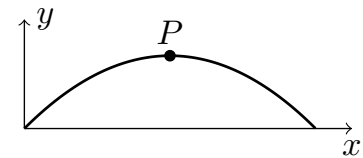
Primera parte

1.- De un vector deslizante \mathbf{a} se conocen los siguientes datos: su recta soporte pasa por el origen, su momento central respecto al punto $P(0, 1, 0)$ es $\mathbf{M}_P = 3\mathbf{i}$, su módulo es $|\mathbf{a}| = 5$ y su segunda componente a_y es positiva. Obtener las componentes de \mathbf{a} en la base cartesiana: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$. (1 punto)

2.- Un punto P describe la trayectoria parabólica de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = at - \frac{1}{2}bt^2 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes. Obtener, en el instante en el que el}$$

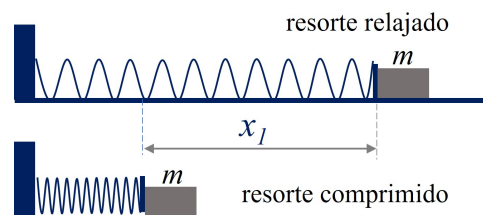
punto P está en la posición indicada en la figura, las componentes intrínsecas de su aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria. (1 punto)



3.- Un misil balístico se dispara desde un punto de la superficie de la Tierra situado en el ecuador verticalmente con una velocidad v . Obtener, en el instante del lanzamiento, el cociente entre la fuerza de Coriolis que actúa sobre el misil y su peso, en función de la masa del misil m , su velocidad v , el periodo de rotación de la Tierra, T y la aceleración local de la gravedad, g . Calcular el valor de dicha relación cuando la velocidad del misil es 1 km/s. (1 punto)
Datos: aceleración de la gravedad $9,8\text{m/s}^2$.

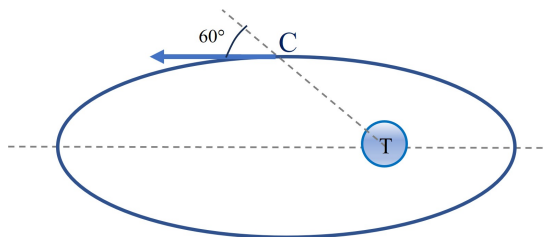
4.- Un péndulo simple está formado por una masa puntual m que puede oscilar en un plano vertical suspendida de un hilo ideal de longitud ℓ . Obtener la tensión del hilo en el instante en el que la masa alcanza la máxima separación de la vertical. (1 punto)

5.- Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal comprime un muelle una distancia x_1 y luego se deja en libertad. El muelle inicialmente comprimido una longitud x_1 , impulsa el bloque a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad v . Si el mismo muelle impulsa un segundo bloque de masa $4m$ con una velocidad $3v$, determinar la longitud de compresión del muelle, x_2 , en este último caso en función de x_1 . (1 punto)

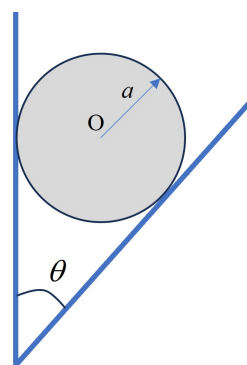


6.- Una masa puntual $m = 2 \text{ kg}$ puede moverse sobre una recta sometida únicamente a una fuerza restauradora no lineal $F = -kx^3$ con $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$. Obtener el trabajo de la fuerza, expresado en julios, cuando lleva a la masa desde $x_i = 20 \text{ cm}$ hasta $x_f = 10 \text{ cm}$. (1 punto)

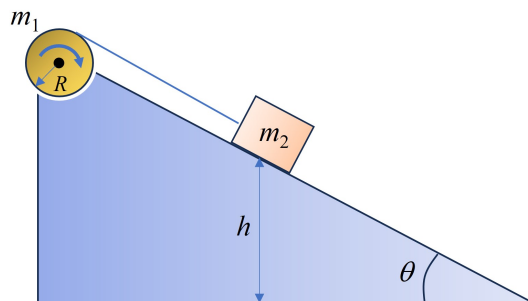
7.- Un satélite artificial de 100 kg se coloca en el punto C (ver figura) a una distancia de 20000 km del centro de la Tierra, con una velocidad de 6000 m/s que forma un ángulo de 60° con la dirección radial. Determinar la velocidad del satélite, expresada en m/s , en el apogeo de su órbita situado a $4 \cdot 10^7 \text{ m}$ de la Tierra. Datos: Masa de la Tierra $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Constante de gravitación $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ (1 punto)



8.- Un cilindro de masa m y radio a se coloca entre dos planos sin rozamiento uno vertical y el otro inclinado un ángulo θ con la vertical. Determinar las reacciones de cada uno de los planos, R_1 y R_2 . (1,5 puntos)



9.- Un cilindro uniforme de masa m_1 y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Alrededor del mismo se enrolla una cuerda conectada a un bloque de masa m_2 como se puede observar en la figura, apoyado en un plano inclinado sin rozamiento de ángulo θ . El sistema se deja en libertad desde el reposo con m_2 a una altura h sobre la base del plano inclinado. Determinar la aceleración del bloque. Dato: Momento de inercia del cilindro respecto a su eje $I = \frac{1}{2} MR^2$. (1,5 puntos)



Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

Se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

Duración: 60 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

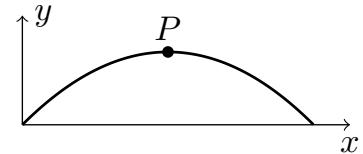
Primera parte

1.- De un vector deslizante \mathbf{a} se conocen los siguientes datos: su recta soporte pasa por el origen, su momento central respecto al punto $P(0, 1, 0)$ es $\mathbf{M}_P = 3\mathbf{i}$, su módulo es $|\mathbf{a}| = 5$ y su segunda componente a_y es positiva. Obtener las componentes de \mathbf{a} en la base cartesiana: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$. (1 punto)

El momento central es $\mathbf{M}_P = \mathbf{PO} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -a_z\mathbf{i} + a_x\mathbf{k} = 3\mathbf{i}$, de donde $a_x = 0$ y $a_z = -3$. Como el módulo es $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_y^2 + a_z^2}$ y $a_y > 0$ resulta $a_y = 4$. Por tanto, $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

2.- Un punto P describe la trayectoria parabólica de ecuaciones paramétricas

$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = at - \frac{1}{2}bt^2 \end{cases}$, con a y b constantes. Obtener, en el instante en el que el punto P está en la posición indicada en la figura, las componentes intrínsecas de su aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria. (1 punto)



En el instante considerado el vector unitario tangente es $\mathbf{t} = \mathbf{i}$ y el normal $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$. Las componentes de la velocidad son $\begin{cases} \dot{x}(t) = a \\ \dot{y}(t) = a - bt \end{cases}$ y de la aceleración $\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -b \end{cases}$. Por tanto $a_t = 0$, $a_n = b$. El radio de curvatura se

obtiene de $\rho = \frac{v^2}{a_n}$.

$a_t = 0$

$a_n = b$

$\rho = \frac{a^2}{b}$

3.- Un misil balístico se dispara desde un punto de la superficie de la Tierra situado en el ecuador verticalmente con una velocidad v . Obtener, en el instante del lanzamiento, el cociente entre la fuerza de Coriolis que actúa sobre el misil y su peso, en función de la masa del misil m , su velocidad v , el periodo de rotación de la Tierra, T y la aceleración local de la gravedad, g . Calcular el valor de dicha relación cuando la velocidad del misil es 1 km/s. (1 punto)

Datos: aceleración de la gravedad $9,8 \text{ m/s}^2$

La fuerza de Coriolis está dada por $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. En la situación descrita $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T}$. Resulta:

$\frac{|\mathbf{F}_{\text{Cor}}|}{mg} = \frac{4\pi v}{gT}$

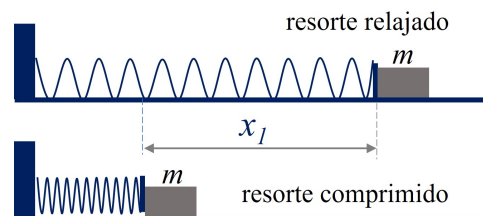
La aplicación numérica pedida: $\frac{|\mathbf{F}_{\text{Cor}}|}{mg} = \frac{4\pi v}{gT} = \frac{4\pi \cdot 1 \cdot 10^3}{9,8 \cdot 86400}$

$\frac{|\mathbf{F}_{\text{Cor}}|}{mg} = 0,015$

4.- Un péndulo simple está formado por una masa puntual m que puede oscilar en un plano vertical suspendida de un hilo ideal de longitud ℓ . Obtener la tensión del hilo en el instante en el que la masa alcanza la máxima separación de la vertical. (1 punto)

La ecuación del movimiento para las componentes normales de fuerza y aceleración es $m\frac{v^2}{\ell} = T - mg \cos \theta$. En el instante de amplitud máxima la velocidad es nula. Por tanto, $T = mg \cos \theta$

5.- Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal comprime un muelle una distancia x_1 y luego se deja en libertad. El muelle inicialmente comprimido una longitud x_1 , impulsa el bloque a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad v . Si el mismo muelle impulsa un segundo bloque de masa $4m$ con una velocidad $3v$. Determinar la longitud de compresión del muelle, x_2 , en este último caso en función de x_1 . (1 punto)



En las dos situaciones descritas en el enunciado se conserva la energía mecánica. La energía potencial elástica del muelle comprimido por el bloque se transforma en energía cinética cuando éste se libera $E_p = E_c$. Se tiene

Para la masa m : $\frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} mv^2$

Para la masa $4m$: $\frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2} (4m)(3v)^2$

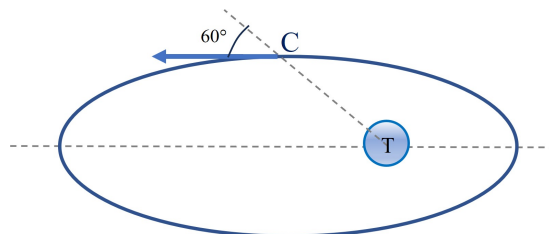
eliminando k entre ambas ecuaciones $\Rightarrow \frac{mv^2}{x_1^2} = \frac{36mv^2}{x_2^2}$ $x_2 = 6x_1$

6.- Una masa puntual $m = 2 \text{ kg}$ puede moverse sobre una recta sometida únicamente a una fuerza restauradora no lineal $F = -kx^3$ con $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$. Obtener el trabajo de la fuerza cuando lleva a la masa desde $x_i = 20 \text{ cm}$ hasta $x_f = 10 \text{ cm}$. (1 punto)

El trabajo se puede calcular como $W = \int F dx = - \int_{x_i}^{x_f} kx^3 dx$. Sustituyendo valores numéricos,

$$W = \frac{15}{4} \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

7.- Un satélite artificial de 100 kg se coloca en el punto C (ver figura) a una distancia de 20000 km del centro de la Tierra, con una velocidad de 6000 m/s que forma un ángulo de 60° con la dirección radial. Determinar la velocidad del satélite en el apogeo de su órbita situado a $4 \cdot 10^7 \text{ m}$ de la Tierra. Datos: Masa de la Tierra $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Constante de gravitación $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ (1 punto)



La fuerza de atracción es central, el momento angular es constante en todos los puntos de la trayectoria.

El módulo del momento angular inicial: $|\mathbf{L}_C| = |\mathbf{r}_C \times m_s \mathbf{v}_C| = m_s r_C v_C \sin 60^\circ$

Y en el apogeo, punto más alejado de la órbita: $|\mathbf{L}_a| = |\mathbf{r}_a \times m_s \mathbf{v}_a| = m_s r_a v_a \sin 90^\circ$

Igualando ambos: $v_a = \frac{r_C}{r_a} v_C \sin 60^\circ = 2598,08$

$$v_a = 2598,08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8.- Un cilindro de masa m se coloca entre dos planos sin rozamiento uno vertical y el otro inclinado un ángulo θ con la vertical. Determinar las reacciones de cada uno de los planos, R_1 y R_2 . (1,5 puntos)

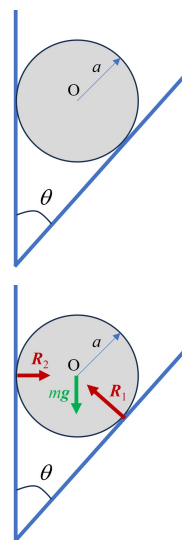
Las reacciones son perpendiculares a los planos.

Las tres fuerzas: el peso y las dos reacciones son concurrentes y pasan por el punto O. Para determinarlas basta imponer que la suma de las fuerzas es igual a cero

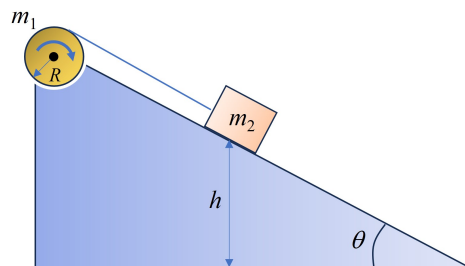
$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow R_2 - R_1 \cos \theta = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 \sin \theta - mg = 0 \end{array} \right.$$

$$R_1 = \frac{mg}{\sin \theta}$$

$$R_2 = \frac{mg}{\text{tg} \theta}$$



9.- Un cilindro uniforme de masa m_1 y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Alrededor del mismo se enrolla una cuerda conectada a un bloque de masa m_2 como se puede observar en la figura, apoyado en un plano inclinado sin rozamiento de ángulo θ . El sistema se deja en libertad desde el reposo con m_2 a una altura h sobre la base del plano inclinado. Determinar la aceleración del bloque. Dato: Momento de inercia del cilindro respecto a su eje $I = \frac{1}{2} MR^2$. (1,5 puntos)



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica a la masa m_2 en la dirección tangencial al plano:

$$m_2 a = -T + m_2 g \sin \theta$$

Para calcular la tensión, se aplica la ecuación fundamental de la dinámica de rotación al cilindro:

$$\sum M_\delta = I_\delta \alpha \text{ con } \alpha = -\frac{a}{R} \Rightarrow -RT = -I_\delta \frac{a}{R}$$

Sustituyendo el momento de inercia y despejando $T = \frac{1}{2} m_1 a$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$m_2 a = -\frac{1}{2} m_1 a + m_2 g \sin \theta$$

$$a = \frac{2m_2 g \sin \theta}{m_1 + 2m_2}$$

Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

Se permite el uso de calculadora

Calificación: 50% del total del examen

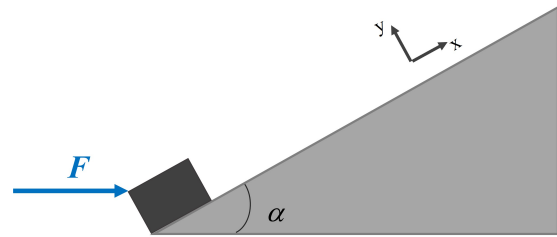
Duración: 90 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

Dato: Aceleración de la gravedad $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ Segunda parte - Problema 1

Un cuerpo de masa $m = 2 \text{ kg}$, considerado como puntual, se encuentra en reposo en la base de un plano inclinado rugoso de ángulo $\alpha = 30^\circ$ y coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,3$. Si sobre dicho cuerpo se aplica una fuerza horizontal $F = 25 \text{ N}$ durante 3 s determinar:

a) Aceleración que adquiere el cuerpo expresada en m/s^2 . (1,5 puntos)



b) La distancia en metros que recorre el cuerpo durante el tiempo que se aplica la fuerza F . (1 punto)

c) El tiempo en segundos que tarda en detenerse a partir de que la fuerza F deja de aplicarse. (1 punto)

d) La distancia en metros recorrida por el cuerpo desde el inicio del movimiento en la base del plano. (0,5 puntos)

e) El tiempo en segundos que emplea el cuerpo en bajar hasta la base del plano inclinado. (1,5 puntos)

f) La velocidad con la que llega a la base del plano inclinado expresada en m/s.

(0,5 puntos)

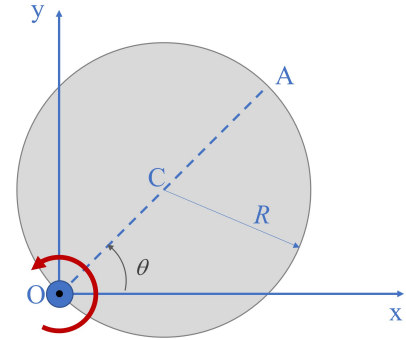
Segunda parte - Problema 1

Un disco rígido de radio R rota en sentido antihorario alrededor de un eje fijo que pasa por un punto O de su perímetro coincidente con el origen de coordenadas de un sistema de referencia cartesiano (ver figura).

El punto A , situado en el perímetro del disco diametralmente opuesto a O , tiene un movimiento uniforme y el módulo de su aceleración vale $|\mathbf{a}| = 4\Omega^2 R$, siendo Ω constante.

Se pide:

a) Indicar la trayectoria del punto A . (0,5 puntos)



b) La expresión vectorial de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la rotación del disco en torno al eje que pasa por O . (1,5 puntos)

c) La expresión vectorial de la velocidad instantánea del centro C del disco en el instante en que $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad, siendo θ el ángulo que forma en cada instante el diámetro OA con el eje Ox . (1,5 puntos)

d) Determinar el centro instantáneo de rotación en el instante mostrado en la figura. (0,5 puntos)

Apellidos: _____ Nombre: _____ N^o Matrícula: _____

Se permite el uso de calculadora Calificación: 50% del total del examen Duración: 90 minutos

Escriba el resultado final en el recuadro utilizando el espacio disponible para justificar su respuesta

Dato: Aceleración de la gravedad $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ **Segunda parte - Problema 1**

Un cuerpo de masa $m = 2 \text{ kg}$, considerado como puntual, se encuentra en reposo en la base de un plano inclinado rugoso de ángulo $\alpha = 30^\circ$ y coeficiente de rozamiento $\mu = 0,3$. Si sobre dicho cuerpo se aplica una fuerza horizontal $F = 25 \text{ N}$ durante 3 s determinar:

a) Aceleración que adquiere el cuerpo expresada en m/s^2 . (1,5 puntos)

Durante un tiempo $t = 3 \text{ s}$ se aplica una fuerza horizontal al cuerpo que adquirirá un movimiento gobernado por la segunda ley de Newton donde, además de la fuerza anterior, habrá que tener en cuenta el peso, la reacción normal y la fuerza de rozamiento representadas todas ellas en la figura.

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{a}$$

Descomponiendo según la referencia mostrada:

$$\begin{cases} ma_x = ma = F \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_r \\ ma_y = 0 = N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha \end{cases}$$

De la segunda ecuación se puede obtener la reacción normal y a partir de ella la fuerza de rozamiento:

$$N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha \Rightarrow F_r = \mu N = \mu(mg \cos \alpha + F \sin \alpha)$$

La aceleración del movimiento durante el tiempo de aplicación de la fuerza \mathbf{F} ,

$$a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m}$$

$$a = 1,5 \text{ m/s}^2$$

b) La distancia en metros que recorre el cuerpo durante el tiempo que se aplica la fuerza \mathbf{F} . (1 punto)

Al tener un movimiento uniformemente acelerado la distancia recorrida por el cuerpo está dada por:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 3^2 = 6, \text{ m}$$

$$s = 6,77 \text{ m}$$

donde se ha tenido en cuenta que parte del reposo, $v_0 = 0$, y se ha tomado como origen de distancias la posición en el instante inicial, $s_0 = 0$.

La velocidad en ese instante $v = v_0 + at = 1,5 \cdot 3 = 4,51 \text{ m/s}$

c) El tiempo en segundos que tarda en detenerse a partir de que la fuerza \mathbf{F} deja de aplicarse. (1 punto)

Una vez que la fuerza \mathbf{F} deja de aplicarse, $t > 3 \text{ s}$, la aceleración del cuerpo pasa a ser

$$a' = -\frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m} = -\frac{2 \cdot 9,8(\sin 30 + 0,3 \cos 30)}{2} = -7,45 \text{ m/s}^2$$

El movimiento ahora es desacelerado, el cuerpo seguirá subiendo por el plano inclinado hasta que se detenga, el tiempo transcurrido será:

$$v = v_0 - a' t \Rightarrow t = \frac{v_0}{a'} = \frac{4,51}{7,45} = 0,61 \text{ s}$$

$$t = 0,61 \text{ s}$$

d) La distancia en metros recorrida por el cuerpo desde el inicio del movimiento en la base del plano. (0,5 puntos)

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a' t^2 = 6,77 + 4,51 \cdot 0,61 - \frac{1}{2} 7,45 \cdot 0,61^2 = 8,14 \text{ m}$$

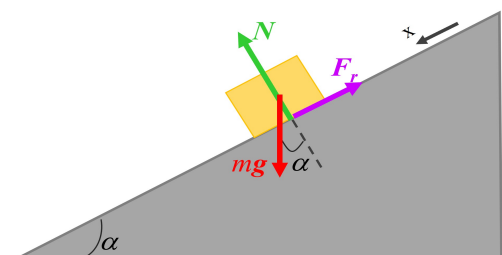
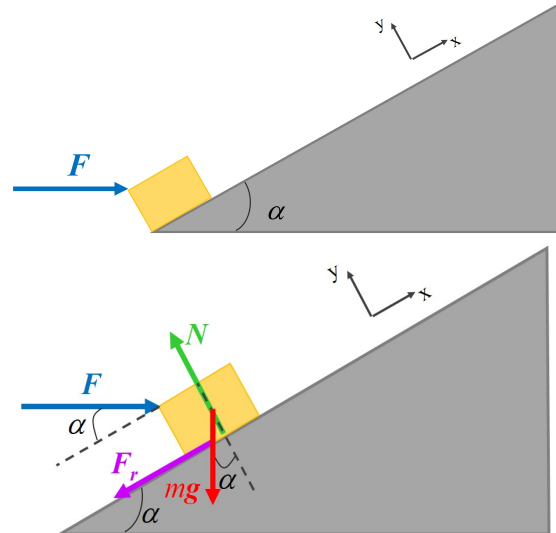
$$s = 8,14 \text{ m}$$

e) El tiempo total en segundos que emplea el cuerpo en bajar hasta la base del plano inclinado. (1,5 puntos)

Una vez que el cuerpo se detiene comenzará a descender con una aceleración a'' hasta la base del plano inclinado. Aplicando la segunda ley de Newton tomando como sentido positivo del eje x el del movimiento

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{a}'' \Rightarrow \begin{cases} ma''_x = ma'' = mg \sin \alpha - F_r \\ ma''_y = 0 = N - mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{La aceleración: } a'' = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m} = -\frac{2 \cdot 9,8(\sin 30 - 0,3 \cos 30)}{2} = 2,35 \text{ m/s}^2$$



El tiempo que tarda en llegar a la base se obtiene a partir de la ecuación del movimiento uniformemente acelerado,

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a'' t^2 = \frac{1}{2} a'' t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a''}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,14}{2,35}} = 2,63 \text{ s} \quad \boxed{t_{\text{bajada}} = 2,63 \text{ s}}$$

con velocidad inicial nula y habiendo supuesto que en el momento de iniciar la bajada $t = 0$ y $s_0 = 0$.

f) La velocidad con la que llega a la base del plano inclinado expresada en m/s. (0,5 puntos)

Finalmente, la velocidad $v = v_0 + a'' t = 2,35 \cdot 8,14 = 6,19 \text{ m s}^{-1}$ $\boxed{v_{\text{final}} = 6,19 \text{ m s}^{-1}}$

Segunda parte - Problema 1

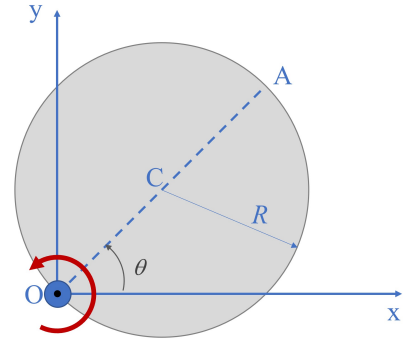
Un disco rígido de radio R rota en sentido antihorario alrededor de un eje fijo que pasa por un punto O de su perímetro coincidente con el origen de coordenadas de un sistema de referencia cartesiano (ver figura).

El punto A , situado en el perímetro del disco diametralmente opuesto a O , tiene un movimiento uniforme y el módulo de su aceleración vale $|\mathbf{a}| = 4\Omega^2 R$, siendo Ω constante.

Se pide:

a) Indicar la trayectoria del punto A . (0,5 puntos)

Si el disco gira permanentemente alrededor de O , el punto A necesariamente realiza un movimiento plano circular de radio $2R$. Este movimiento será uniforme tal como se indica en el enunciado.



Movimiento plano con trayectoria circular de radio $2R$ y centrada en el punto O

b) La expresión vectorial de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la rotación del disco en torno al eje que pasa por O . (1,5 puntos)

Para determinar la velocidad angular del movimiento tenemos en cuenta que al ser la rotación uniforme, la aceleración del punto A es solo aceleración normal cumpliendo

$$|\mathbf{a}_A| = a_{n,A} = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{\omega^2 (2R)^2}{2R} = 2R\omega^2$$

Y del enunciado: $4\Omega^2 R = 2R\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2}\Omega$, en sentido antihorario $\boxed{\boldsymbol{\omega} = \sqrt{2}\Omega \mathbf{k}}$

c) La expresión vectorial de la velocidad instantánea del centro C del disco en el instante en que $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad, siendo θ el ángulo que forma en cada instante el diámetro OA con el eje Ox . (1,5 puntos)

Recordando la expresión del campo de velocidades para un sólido rígido y eligiendo el punto O , la velocidad instantánea del centro del disco C está dada por:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC}$$

donde el vector de posición del centro del disco \mathbf{OC} cuando $\theta = \pi/3$ es: $\mathbf{OC} = R \cos \frac{\pi}{3} \mathbf{i} + R \sin \frac{\pi}{3} \mathbf{j} = \frac{1}{2} R \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} R \mathbf{j}$

Y la velocidad $\mathbf{v}_C = \mathbf{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\Omega \\ \frac{1}{2}R & \frac{\sqrt{3}}{2}R & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\Omega R \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega R \mathbf{j}$

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega R (-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

d) Determinar el centro instantáneo de rotación en el instante mostrado en la figura. (0,5 puntos)

Al ser un movimiento alrededor de un eje fijo el CIR coincide con el punto O .

Punto O