

<b>Matemáticas I (GIO)</b> <b>Prueba de evaluación 2 y examen global</b>	<b>19 de enero de 2023</b>	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	<b>CALIF.</b>
1 <sup>er</sup> Apellido: _____		
2 <sup>o</sup> Apellido: _____		

**CUESTIONES (Escribáanse solo los resultados en los espacios habilitados)**  
(5 puntos) (En el examen global se multiplicará la puntuación por 0,6)

1. Se considera la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ .

a) Escribir los autovalores de  $\mathbf{A}$  con sus respectivas multiplicidades algebraicas.

**Respuesta:** - 2 simple ; 3 doble (1 punto)

b) Escribir las dimensiones de sus subespacios propios.

**Respuesta:** dim(ker( $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$ )) = 1 ; dim(ker( $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ )) = 1 (0,5 puntos)

c) Escribir su forma canónica de Jordan  $\mathbf{J}$  y una matriz  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$ .

**Respuesta:**  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  (1,5 puntos)

2. Hallar todos los valores del parámetro  $\alpha$  que hacen definida positiva la matriz  $\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ .

**Respuesta:**  $\alpha > 2$  (1 punto)

3. Hallar todos los valores del parámetro  $\beta$  para los cuales es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 10 & \beta & -4 \end{pmatrix}.$$

**Respuesta:**  $\beta = 4$  (1 punto)

<b>Matemáticas I (GIO)</b> <b>Prueba de evaluación 2 y examen global</b>	<b>19 de enero de 2023</b>	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	<b>CALIF.</b>
1 <sup>er</sup> Apellido: _____		
2 <sup>o</sup> Apellido: _____		

**PROBLEMA (Deben razonarse todos los resultados o no se considerarán válidos)**  
(5 puntos) (En el examen global se multiplicará la puntuación por 0,6)

Se consideran los vectores columna  $\mathbf{u} = (1 \ -1 \ 2 \ 2)^t$ ,  $\mathbf{v} = (4 \ 4 \ -2 \ 2)^t$  (obsérvese que son ortogonales), y se define la matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{u}^t + \mathbf{v}\mathbf{v}^t$ .

1. Constrúyase una base ortonormal del subespacio  $L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\perp$ . Interpretese este subespacio en términos de la matriz  $\mathbf{A}$ . (1,5 puntos)
2. Calcúlese el producto de  $\mathbf{A}$  por cada una de las columnas  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y analícense los resultados. (1 punto)
3. Utilícense los resultados de los apartados anteriores para diagonalizar ortogonalmente  $\mathbf{A}$ , es decir, encuéntrense una matriz  $\mathbf{Q}$  ortogonal y una matriz  $\mathbf{D}$  diagonal tales que  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$ . (2,5 puntos)

**Nota:** es **muy desaconsejable** trabajar con la expresión explícita de la matriz  $\mathbf{A}$ .

**Respuesta: (Puede entregarse una hoja adicional)**

1.  $\dim(L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\perp) = 4 - \dim(L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = 2$ ; tenemos que encontrar dos vectores ortonormales que sean ortogonales a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , es decir, que satisfagan las ecuaciones  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0$  y  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0$  que son las implícitas de dicho subespacio.

Son por tanto soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tomamos un vector sencillo que satisfaga las dos ecuaciones, por ejemplo con la última componente nula, hacemos  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 4$  lo que nos da  $\tilde{\mathbf{w}} = (-3, 5, 4, 0)$ , que normalizamos a  $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{50}}(-3, 5, 4, 0)$ .

Para encontrar el segundo vector, añadimos a las ecuaciones anteriores la que expresa la ortogonalidad con  $\mathbf{w}$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

con lo que nuestro vector verifica  $x_2 = 0$  y, tomando  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -5$ , obtenemos  $\tilde{\mathbf{z}} = (4, 0, 3, -5)$  que normalizamos a  $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{50}}(4, 0, 3, -5)$ .

Así pues, una base ortonormal de  $L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\perp$  es

$$\left( \frac{1}{\sqrt{50}}(-3, 5, 4, 0), \frac{1}{\sqrt{50}}(4, 0, 3, -5) \right).$$

Es evidente que cualquier vector  $\mathbf{x}$  que pertenezca a este subespacio satisface que

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{uu}^t + \mathbf{vv}^t)\mathbf{x} = \mathbf{uu}^t\mathbf{x} + \mathbf{vv}^t\mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot 0 + \mathbf{v} \cdot 0 = \mathbf{0},$$

es decir,  $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$ .

Recíprocamente, si  $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{0} = \mathbf{uu}^t\mathbf{x} + \mathbf{vv}^t\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v},$$

lo cual implica que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$  al ser  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  linealmente independientes; por consiguiente,  $\mathbf{x} \in L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\perp$ .

En conclusión:

$$L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\perp = \ker \mathbf{A}.$$

**Observación:** Dado que  $\mathbf{A}$  es simétrica,  $\text{Im } \mathbf{A} = (\ker \mathbf{A})^\perp = L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ .

2.  $\mathbf{Au} = (\mathbf{uu}^t + \mathbf{vv}^t)\mathbf{u} = \mathbf{uu}^t\mathbf{u} + \mathbf{vv}^t\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{v} \cdot 0 = 10\mathbf{u}$ , es decir,  $\mathbf{u}$  es un autovector de  $\mathbf{A}$  asociado al autovalor  $\|\mathbf{u}\|^2 = 10$ .

Del mismo modo,  $\mathbf{Av} = \|\mathbf{v}\|^2\mathbf{v} = 40\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}$  es un autovector de  $\mathbf{A}$  asociado al autovalor  $\|\mathbf{v}\|^2 = 40$ .

Obsérvese que estos vectores son ortogonales entre sí como corresponde a vectores propios asociados a valores propios distintos de una matriz real simétrica. También son ortogonales a los vectores del núcleo.

3. La matriz puede diagonalizarse ortogonalmente dado que es real y simétrica. En el apartado 1 hemos construido una base ortonormal de  $\ker \mathbf{A}$ , es decir, del subespacio propio asociado al 0, que es por tanto autovalor doble.

En el apartado 2 hemos observado que  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  constituyen sendos autovectores asociados a los autovalores 10 y 40.

Así pues, basta normalizar estos dos últimos vectores para tener una base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  formada por autovectores de  $\mathbf{A}$ .

Finalmente, tomando la matriz  $\mathbf{Q}$  cuyas columnas son, ordenadamente,  $\mathbf{w}, \mathbf{z}, \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ , es decir,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{50} & 4/\sqrt{50} & 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \\ 5/\sqrt{50} & 0 & -1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \\ 4/\sqrt{50} & 3/\sqrt{50} & 2/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & -5/\sqrt{50} & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{Q}$  es ortogonal y  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \text{diag}(0, 0, 10, 40)$ .