

Matemáticas I (GIO) Convocatoria extraordinaria	5 de julio de 2023	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	CALIF.
1 ^{er} Apellido: _____		
2 ^o Apellido: _____		

PROBLEMA 1 (Deben razonarse todos los resultados o no se considerarán válidos)
(3 puntos)

Dada la aplicación $\Phi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$\Phi(P(x)) = P(x) - (x - 1)P'(x),$$

se pide:

1. Demostrar que Φ es lineal . (0,6 puntos)
2. Construir la matriz de Φ respecto a la base $(1, x, x^2, x^3)$ (0,8 puntos)
3. Hallar una base de $\ker \Phi$ y otra de $\text{Im } \Phi$. (1 punto)
4. Determinar el conjunto $\Phi^{-1}(5 + 2x - x^2)$, es decir, la **contraimagen** mediante Φ del polinomio $5 + 2x - x^2$. ¿Qué estructura tiene este conjunto en $\mathbb{R}_3[x]$? (0,6 puntos)

Respuesta: (Pueden entregarse, como máximo, dos hojas adicionales)

1. Sean $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$, sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi((\lambda P + \mu Q)(x)) &= (\lambda P + \mu Q)(x) - (x - 1)(\lambda P + \mu Q)'(x) = \\ &= \lambda P(x) + \mu Q(x) - (x - 1)(\lambda P'(x) + \mu Q'(x)) = \\ &= \lambda(P(x) - (x - 1)P'(x)) + \mu(Q(x) - (x - 1)Q'(x)) = \\ &= \lambda\Phi(P(x)) + \mu\Phi(Q(x)). \end{aligned}$$

2. Transformamos mediante Φ los elementos de dicha base:

$$\Phi(1) = 1.$$

$$\Phi(x) = x - (x - 1) = 1.$$

$$\Phi(x^2) = x^2 - 2x(x - 1) = 2x - x^2.$$

$$\Phi(x^3) = x^3 - 3x^2(x - 1) = 3x^2 - 2x^3.$$

Los vectores de coordenadas respecto a la misma base de estos transformados, nos proporcionan las correspondientes columnas de la matriz, siendo esta:

$$\mathbf{A} = [\Phi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Observamos la matriz antes hallada, cuyo rango se aprecia a simple vista que vale 3; por tanto, $\dim \text{Im}(\Phi) = 3$ y $\dim \ker(\Phi) = 4 - 3 = 1$. Los transformados mediante Φ de los elementos de la base $(1, x, x^2, x^3)$ constituyen un sistema generador de $\text{Im}(\Phi)$. Por lo tanto, una base es:

$$\mathcal{B}_{\text{Im} \Phi} = (1, 2x - x^2, 3x^2 - 2x^3).$$

En cuanto al núcleo, utilizamos la matriz de la aplicación y resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que inmediatamente nos da $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = -\beta \forall \beta \in \mathbb{R}$.

Es decir, una base del núcleo de la matriz es $((-1, 1, 0, 0))$ y por tanto

$$\mathcal{B}_{\ker \Phi} = (x - 1).$$

4. El polinomio cuya contraimagen nos piden tiene a $(5, 2, -1, 0)$ por vector de coordenadas respecto a la base considerada; tenemos, por tanto, que resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que de modo igualmente inmediato nos da $\lambda = 0$; $\gamma = 1$; $\alpha = 5 - \beta \forall \beta \in \mathbb{R}$.

Es decir, la solución general del sistema es $(5 - \beta, \beta, 1, 0) \forall \beta \in \mathbb{R}$ que, en $\mathbb{R}_3[x]$, corresponde a

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(5 + 2x - x^2) &= \{5 - \beta + \beta x + x^2 : \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{5 + x^2 + \beta(x - 1) : \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Este conjunto constituye una **variedad lineal** de $\mathbb{R}_3[x]$; obsérvese que es el resultado de sumar una contraimagen (solución) particular $5 + x^2$ con todos los vectores del subespacio $\ker \Phi$.

Matemáticas I (GIO) Convocatoria extraordinaria	5 de julio de 2023	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	CALIF.
1 ^{er} Apellido: _____		
2 ^o Apellido: _____		

PROBLEMA 2 (Deben razonarse todos los resultados o no se considerarán válidos)
(3 puntos)

1. En la recta real, se considera la siguiente relación:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Razonar si la relación \sim es o no de equivalencia; en caso afirmativo, constrúyase además el conjunto cociente \mathbb{R}/\sim , es decir, el conjunto de todas las clases de equivalencia mediante dicha relación. (1 punto)

2. Sea la matriz real $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & -2 \\ 2 & -2 & d \end{pmatrix}$.

a) Determinar todos los valores de los parámetros a, b, c, d que hacen que \mathbf{A} sea diagonalizable ortogonalmente, es decir, que existan sendas matrices \mathbf{Q} ortogonal y \mathbf{D} diagonal tales que $\mathbf{Q}^t \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{D}$. (0,5 puntos)

b) Sea ahora $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Diagonalizar ortogonalmente \mathbf{A} , es decir, hallar las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{D} mencionadas en el apartado anterior. (1,5 puntos)

Respuesta: (Pueden entregarse, como máximo, dos hojas adicionales)

1) i) $\forall x \in \mathbb{R}, x-x=0 \in \mathbb{Z}$, luego $x \sim x$. ✓

ii) $x, y \in \mathbb{R}$; si $x-y \in \mathbb{Z}$, entonces $y-x = -(x-y) \in \mathbb{Z}$, luego $x \sim y \Rightarrow y \sim x$. ✓

iii) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \sim y \wedge y \sim z$, es decir $x-y \in \mathbb{Z}$ e $y-z \in \mathbb{Z}$.

Entonces, $x-z = \underbrace{x-y}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{y-z}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$, luego

$x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$. ✓

La relación es, por tanto, de equivalencia, y podemos construir su conjunto cociente.

Dado $x \in \mathbb{R}$, determinamos su clase de equivalencia, es decir, todos los elementos relacionados con él:

$$[x] := \{x+k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Podemos tomar como representante de $[x]$, por ejemplo, aquel valor de $x+k$ que pertenece a $[0, 1)$, es decir, su parte decimal. Dos elementos pertenecen a la misma clase \Leftrightarrow sus partes decimales son iguales.

Así pues, tenemos una clase de equivalencia para cada elemento de $[0, 1)$, siendo estas todas las posibles, y podemos escribir:

$$\mathbb{R}/\sim \approx [0, 1).$$

2) a) La condición es que la matriz sea simétrica y, por tanto, los valores de los parámetros son

$$b=2 \wedge a=c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}.$$

b) Empezamos calculando los valores propios de A:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 2 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = (2-\lambda)^2(-4-\lambda) \\ &\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0; \lambda = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 = \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = 2 \text{ doble}; \lambda = -4 \text{ simple.}$$

Para el valor propio doble (subespacio propio de dim. 2), tenemos que escoger los dos vectores ortonormales:

$$\lambda = 2:$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}; \text{ tomamos p.ej. } q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y ahora}$$

imponemos, además de la ecuación de $\text{Ker}(A-2I)$, la que expresa la ortogonalidad a q_1 :

$$x_1 + x_2 = 0 \rightsquigarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para el valor propio simple, basta tomar un vector unitario:

$$\lambda = -4:$$

$$A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Observamos, a modo de comprobación, que este vector ha salido automáticamente ortogonal a los dos anteriores (podríamos haber escogido q_3 simplemente como un vector ortogonal a q_1 y q_2 y unitario).

Así pues, la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

es ortogonal y

$$Q^t A Q = \text{diag}(2, 2, -4).$$

Matemáticas I (GIO) Convocatoria extraordinaria	5 de julio de 2023	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	CALIF.
1 ^{er} Apellido: _____		
2 ^o Apellido: _____		

CUESTIONES (Escribáanse solo los resultados en los espacios habilitados)
(4 puntos)

1. **Determinése la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones, marcando con “×” la casilla correspondiente.** (1,5 puntos)

· Cada respuesta correcta suma 0,3 puntos. · **Cada respuesta incorrecta resta 0,3 puntos.** · Las respuestas en blanco no modifican la nota. · La nota mínima del bloque será 0 puntos.

Sean **A, B** matrices cuadradas del mismo orden n ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$):

	V	F
Si $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = n$, entonces $r(\mathbf{AB}) = n$.	×	
$\max(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})) \leq r(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.		×
Si A es invertible, entonces $\ker(\mathbf{AB}) = \ker \mathbf{B}$.	×	
Si el sistema $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones para algún $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $r(\mathbf{A}) < n$.		×
Si el sistema $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ tiene solución única para cierto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\ker \mathbf{B} = \{\mathbf{0}\}$.	×	

2. Escribir unas ecuaciones implícitas del subespacio de \mathbb{R}^4

$$L[(1, -1, 0, 1), (1, 1, -1, 1), (1, -3, 1, 1)].$$

Respuesta:

$$x_1 - x_4 = 0;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

(0,5 puntos)

3. Hallar todos los valores del parámetro μ para los cuales es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & \mu \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respuesta:

$$\mu = -4$$

(0,5 puntos)

-
4. Hallar todos los valores de los parámetros α, β que hacen definida positiva la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta:

$$\alpha^2 + \beta^2 < 2$$

(0,5 puntos)

5. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$, escribir su forma canónica de Jordan \mathbf{J} y una matriz

\mathbf{P} tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$.

Respuesta:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1 punto)
