

<b>Álgebra (GITI) - Convocatoria extraordinaria</b>	<b>29 de junio de 2023</b>	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	<b>CALIF.</b>
1 <sup>er</sup> Apellido: _____	<input type="text"/>	
2 <sup>o</sup> Apellido: _____	<input type="text"/>	

**CUESTIONES** (4 puntos)

**Solo se entregará esta hoja con los resultados** en los espacios consignados. △

1. **Determinése la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones, marcando con “×” la casilla correspondiente.** (1,5 puntos)

· Cada respuesta correcta suma 0,3 puntos. · **Cada respuesta incorrecta resta 0,3 puntos.** · Las respuestas en blanco no modifican la nota. · La nota mínima del bloque será 0 puntos.

Sean **A, B** matrices cuadradas del mismo orden  $n$  ( $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ):

	V	F
Si $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = k$ , entonces $r(\mathbf{AB}) = k$ .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$ .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Si <b>A</b> es invertible y $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ , el sistema $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ tiene las mismas soluciones que $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Si el sistema $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ tiene solución única para algún $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ , entonces $r(\mathbf{A}) = n$ .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si el sistema $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ es compatible para cierto $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ , entonces $\mathbf{b} \in \text{Im } \mathbf{B}$ .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

2. Se considera la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Determinar todos los valores del parámetro  $\alpha$  que hacen que el vector  $(\alpha, 1, \alpha)$  sea ortogonal a  $\ker \mathbf{A}$ .

**Respuesta:**  (0,5 puntos)

3. En  $\mathbb{R}^4$ , se consideran los subespacios  $M$  y  $N$  definidos por

$$M = L[(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)] \quad , \quad N = L[(0, 1, 2, 3), (-2, 1, 1, 1)].$$

Escribir una base del subespacio  $M \cap N$ .

**Respuesta:**  (0,5 puntos)

- 
4. Se consideran los polinomios  $P(x) = x^2 + 3x - 1$ ,  $Q(x) = x^2 + x + 1$  y  $R(x) = (\alpha + x)P'(x)$ .

Hallar todos los valores del parámetro  $\alpha$  para los cuales los polinomios  $P, Q, R$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}_2[x]$ .

**Respuesta:**

$$\alpha = \frac{1}{5}$$

(0,5 puntos)

---

5. Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dos vectores solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/3 \\ e^{-2} \\ 2023 \end{pmatrix}.$$

Escribir un vector no nulo proporcional a  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .

**Respuesta:**

$$(7, 6, 5, 3)$$

(0,5 puntos)

---

6. Sea el número complejo  $z = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ .

Hallar el menor valor entero positivo de  $n$  tal que  $z^n$  y  $z$  sean números conjugados entre sí.

**Sugerencia:** Calcúlese primero  $z^2$  e intérpretese el resultado.

**Respuesta:**

$$n = 15$$

(0,5 puntos)

---

<b>Álgebra (GITI) - Prueba de evaluación 3</b>	<b>29 de junio 2023</b>	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	<b>CALIF.</b>
1 <sup>er</sup> Apellido: _____		
2 <sup>o</sup> Apellido: _____		

**PROBLEMA 1** (3 puntos):

**NOTA:** Todas las respuestas deben justificarse o no se considerarán válidas. Solo se puede responder en las hojas de este cuadernillo. Todas las respuestas deben escribirse con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será calificado.

Sea la matriz  $\mathbf{A}$ , que está asociada a una aplicación lineal  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Obtenga los valores propios de  $\mathbf{A}$ , comprobando que no dependen del valor del parámetro  $\alpha$ . (1 punto)
2. Para cada uno de los valores propios de  $\mathbf{A}$ , obtenga sus correspondientes vectores propios en función de  $\alpha$ . Indique los valores de  $\alpha$  para los que la matriz es diagonalizable. (1 punto)
3. La matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable para  $\alpha = 0$ . En este caso, halla una matriz diagonal semejante  $\mathbf{D}$  y la matriz correspondiente  $\mathbf{P}$  que hacen  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ . (1 punto)

**Respuesta:**

1.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 + \alpha - \lambda & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha - \lambda & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

Los valores propios son, por tanto,  $\lambda_1 = -1$  con una multiplicidad algebraica simple, y  $\lambda_2 = 1$  con una multiplicidad algebraica doble.

2. Para  $\lambda_1 = -1$  tenemos:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_3 = \mathbf{A} + \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & 1 - \alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la segunda y la tercera columna son opuestas, se ve que los vectores propios correspondientes deben ser proporcionales a:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para  $\lambda_2 = 1$  tenemos:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_3 = \mathbf{A} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La primera fila es proporcional a  $\alpha$ . Entonces, si  $\alpha = 0$ , tenemos:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y los vectores propios asociados serán, por ejemplo:

$$\mathbf{v}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz es diagonalizable si  $\alpha = 0$ . Si, por el contrario,  $\alpha \neq 0$ , podemos dividir la primera fila entre  $\alpha$  para tener:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 + \alpha & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mediante transformaciones de Gauss, queda reducida a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 + \alpha & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Únicamente tiene un vector propio:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz no es diagonalizable si  $\alpha \neq 0$ .

3. Con los resultados del apartado anterior podemos ver que:

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz  $\mathbf{P}$  se construye con los vectores propios:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_{2,1} \quad \mathbf{v}_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Álgebra (GITI) - Convocatoria Extraordinaria	29 de junio 2023	
Nombre: _____	Núm. de Matrícula:	<b>CALIF.</b>
1 <sup>er</sup> Apellido: _____	<input type="text"/>	
2 <sup>o</sup> Apellido: _____	<input type="text"/>	

**NOTA:** Todas las respuestas deben justificarse o no se considerarán válidas. Solo se puede responder en las hojas de este cuadernillo. Todas las respuestas deben escribirse con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será calificado.

**PROBLEMA 2** (3 puntos):

Se consideran la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$  y el vector  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Se pide:

1. Del subespacio  $\text{Im } \mathbf{A}$ , encuéntrense: una base ortogonal y una base de su suplementario ortogonal. (1 punto)
2. Calcúlese la matriz de proyección ortogonal para  $\text{Im } \mathbf{A}$  y  $\text{Im}(\mathbf{A})^\perp$ . Asimismo Encuentre la proyección ortogonal de  $\mathbf{b}$  sobre  $\text{Im } \mathbf{A}$  y  $\text{Im}(\mathbf{A})^\perp$ . ¿El sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene solución? Justifique su respuesta. (1 punto)
3. Una solución del problema de mínimos cuadrados del sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , esta dado por  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  con  $x_3 = 1$  y  $x_4 = 1$ . Encuentre los valores de  $x_1$  y  $x_2$ . ¿Es  $\mathbf{x}$  la única solución? Justifique su respuesta. (1 punto)

**Respuesta:** (Todos los resultados deben razonarse y desarrollarse en esta hoja, y a lo sumo, en UNA adicional.)

1. Recordemos que  $\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{gen}\{\text{Col}(\mathbf{A})\} = L[\text{Col}(\mathbf{A})]$ . Así, haciendo operaciones por fila para  $\mathbf{A}^T$  obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí concluimos que  $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  Es una base de  $\text{Im}(\mathbf{A})$ . No es difícil ver que

$$B'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es una base ortonormal para  $\text{Im}(\mathbf{A})$ . Tomando en cuenta que  $\text{Im}(\mathbf{A})^\perp$  tiene dimensión uno, entonces una base para este espacio sera

$$\tilde{B}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Del apartado anterior es inmediato construir la matriz de proyección para los subespacios. Si definimos

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{P}_{\text{Im}(\mathbf{A})} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\text{Im}(\mathbf{A})^\perp} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{Q}}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $\mathbf{P}_{\text{Im}(\mathbf{A})}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{b}$  concluimos que el sistema no tiene solución.

3. Finalmente, para encontrar la solución de mínimos cuadrados necesitamos resolver el sistema  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ . Este sistema es equivalente matricialmente a

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 46 & -31 & 63 & 15 & 1 \\ -31 & 21 & -43 & -10 & -1 \\ 63 & -43 & 89 & 20 & 3 \\ 15 & -10 & 20 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 9 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Luego, toda solución se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 - x_4 \\ -3 + 5x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

En particular para  $x_3 = x_4 = 1$ , tenemos que  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Claramente la solución no es única