

Álgebra (GITI)	15 de julio de 2021	
Nombre:	Número de Matrícula	NOTA
1 ^{er} Apellido:		
2 ^o Apellido:		

CUESTIONES (3,5 puntos):

△

En este ejercicio, **solamente se entregará esta hoja con los resultados** en los espacios señalados al efecto. No hay que justificar las respuestas. No se corregirá ninguna hoja adicional ni se tendrá en cuenta ninguna respuesta que no se ajuste a lo aquí indicado.

1. Determínese la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones, marcando con “×” la casilla correspondiente.

- Cada respuesta correcta vale 0,2 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos. Las respuestas en blanco no modifican la nota. La nota mínima del bloque será de cero puntos.

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sea k un número natural cualquiera.

	V	F
Si $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ es autovector de \mathbf{A}^k , entonces también es autovector de \mathbf{A}		×
Si \mathbf{A} es invertible y $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ es autovector de \mathbf{A} , entonces también es autovector de \mathbf{A}^{-1}	×	
Si \mathbf{A}^k es matriz de proyección ortogonal, entonces \mathbf{A} también lo es		×
Para toda matriz \mathbf{S} de simetría ortogonal, $\mathbf{S}^k = \mathbf{S} \iff k$ es impar	×	
Si \mathbf{A} es diagonalizable por \mathbf{P} , entonces \mathbf{A}^k es diagonalizable por \mathbf{P}^k		×

2. Se considera el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar los valores del parámetro a que hacen que el sistema sea compatible.

Respuesta: (0,3 puntos)

b) Para $a = 0$, encontrar la solución general de mínimos cuadrados del sistema.

Respuesta: (0,7 puntos)

3. Sea p el máximo entre las unidades, decenas y centenas de su número de matrícula. Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -p & 2p \\ 2p & -4p \end{pmatrix}.$$

a) Indicar qué tipo de curva cónica representa la ecuación $(x, y)\mathbf{A}(x, y)^T = 0$.

Respuesta: (0,5 puntos)

b) Resolver el problema de valor inicial $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, dado el vector de condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (p, -p)^T$.

Respuesta: (1 punto)

Álgebra (GITI)	15 de julio de 2021
----------------	---------------------

Nombre:	Número de Matrícula	NOTA
1 ^{er} Apellido:		
2 ^o Apellido:		

EJERCICIO 1 (3 puntos):

Se considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3 \ 4)$.

Nota: En todo el ejercicio, se recomienda vivamente utilizar esta factorización de \mathbf{A} , **sin efectuar el producto**.

- Hállense sendas bases de $\text{Im } \mathbf{A}$ y de $\text{ker } \mathbf{A}$. Razónese si dichos subespacios son suplementarios en \mathbb{C}^4 .
- Si \mathbf{u} es cualquier vector de $\text{Im } \mathbf{A}$, calcúlese $\mathbf{A}\mathbf{u}$, expresándolo en términos de \mathbf{u} .
- Sea $\mathbf{B} = 2 \cdot 10^{-12} \mathbf{A}^{12} + 4\mathbf{I}$. Encuéntrense sendas matrices $\mathbf{P}, \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$, con \mathbf{P} regular y \mathbf{D} diagonal, tales que $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Respuesta: (Todos los resultados deben razonarse y desarrollarse en esta hoja, y a lo sumo, **una** adicional.)

- El subespacio columna de \mathbf{A} está generado por el vector $(1 \ -2 \ 3 \ -4)^t$, constituyendo por tanto dicho vector una base de $\text{Im } \mathbf{A}$.

El subespacio fila de \mathbf{A} está generado por el vector $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$, siendo por tanto $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$ la única ecuación de $\text{ker } \mathbf{A}$ (cuya dimensión es $4 - 1 = 3$), luego basta encontrar tres vectores linealmente independientes que satisfagan dicha ecuación; por ejemplo,

$$((2 \ -1 \ 0 \ 0), (3 \ 0 \ -1 \ 0), (4 \ 0 \ 0 \ -1))$$

es una base de $\text{ker } \mathbf{A}$.

Dado que $\dim(\text{Im } \mathbf{A}) = 1$ y que el vector que genera $\text{Im } \mathbf{A}$ no satisface la ecuación de $\text{ker } \mathbf{A}$, se tiene que $\text{Im } \mathbf{A} \cap \text{ker } \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ y, como $\dim(\text{Im } \mathbf{A}) + \dim(\text{ker } \mathbf{A}) = \dim(\mathbb{C}^4)$, se concluye que $\mathbb{C}^4 = \text{Im } \mathbf{A} \oplus \text{ker } \mathbf{A}$, es decir, dichos subespacios son suplementarios.

(1 punto)

- Si denotamos $\mathbf{v} = (1 \ -2 \ 3 \ -4)^t$, $\mathbf{w} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^t$, tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{v}\mathbf{w}^t$ y sabemos que todo vector $\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{A}$ es de la forma $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$; así pues,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{w}^t(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}(\mathbf{w}^t\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} \cdot (-10) = -10\mathbf{u}.$$

(0,5 puntos)

Observación 1: Esto significa que todo vector no nulo de la imagen es vector propio de \mathbf{A} asociado al autovalor -10 , único autovalor no nulo puesto que $r(\mathbf{A}) = 1$.

Observación 2: Como $\ker \mathbf{A}$ es el subespacio propio asociado al autovalor 0 , tenemos un argumento alternativo para concluir que $\text{Im } \mathbf{A}$ y $\ker \mathbf{A}$ son suplementarios en \mathbb{C}^4 .

3. Para $\mathbf{A} = \mathbf{v}\mathbf{w}^t$ según la notación del apartado 2, tenemos que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}(\mathbf{w}^t\mathbf{v})\mathbf{w}^t = -10\mathbf{v}\mathbf{w}^t = -10\mathbf{A}$; reiterando el producto, se llega a $\mathbf{A}^{12} = -10^{11}\mathbf{A}$. Por tanto,

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{5}\mathbf{A} + 4\mathbf{I}.$$

Para cada λ valor propio de \mathbf{A} , $-\frac{1}{5}\lambda + 4$ lo es de \mathbf{B} con los mismos vectores propios. Por tanto, nos remitiremos a la diagonalización de \mathbf{A} .

Por lo razonado antes, \mathbf{A} tiene los autovalores 0 y -10 , con $\dim(\ker(\mathbf{A})) = 3$ y $\dim(\ker(\mathbf{A} + 10\mathbf{I})) = 1$, cuyas bases respectivas son las calculadas en el apartado 1. Por tanto, tomando

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

se tiene que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(0, 0, 0, -10)$.

Y en conclusión, con esa misma matriz \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \text{diag}(4, 4, 4, 6)$$

que es la matriz \mathbf{D} pedida.

(1,5 puntos)

Álgebra (GITI)	15 de julio de 2021
----------------	---------------------

Nombre:	Número de Matrícula	NOTA
1 ^{er} Apellido:		
2 ^o Apellido:		

EJERCICIO 2 (3.5 puntos):

Dada la matriz $\mathbf{P} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ de elementos reales, se pide resolver las siguientes cuestiones:

1. Calcular unos valores de α , β y γ distintos de cero que hagan que \mathbf{P} sea una matriz de proyección ortogonal (1 punto).
2. Indicar una base del subespacio donde proyecta la matriz \mathbf{P}_{proy} , es decir, la matriz \mathbf{P} con los parámetros calculados en el apartado anterior (0.5 puntos).
3. Los diseñadores de un coche recientemente lanzado al mercado habían ideado este algoritmo para controlar el disparo de sus airbags: un sensor mide deceleraciones en los tres ejes cartesianos del espacio euclídeo, resultando en el vector $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$. A continuación, una centralita electrónica proyecta ortogonalmente el vector \mathbf{a} usando la matriz \mathbf{P}_{proy} . Si la norma euclídea de la proyección de \mathbf{a} superara la deceleración límite $a_{lim} = 10$ durante un impacto, entonces se dispararían los airbags.

Sin embargo, en algunos de los vehículos vendidos se han producido disparos inesperados de los airbags sin haber un impacto que lo justificase. Tras analizar el software de las centralitas electrónicas de los vehículos defectuosos, se descubre que la matriz errónea utilizada para proyectar el vector de deceleraciones $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ es la siguiente:

$$\mathbf{P}_{err} = 1/5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Se pide responder a estas preguntas:

- a) Calcular los valores propios de la matriz errónea \mathbf{P}_{err} y bases ortonormales de sus subespacios propios asociados (1 punto).
- b) Mientras se conduce uno de los vehículos defectuosos el sensor mide el vector $\mathbf{a} = (2, 0, 6)^T$. Razonar comparando los autovalores y los subespacios propios de las dos matrices por qué salta el airbag del vehículo defectuoso tras medirse este vector, y cómo con la matriz de proyección correcta \mathbf{P}_{proy} el airbag no habría saltado (1 punto).

Respuesta: (Todos los resultados deben razonarse y desarrollarse en esta hoja, y a lo sumo, en DOS adicionales.)

Soluciones:

1. \mathbf{P} será matriz de proyección ortogonal si y sólo si es simétrica ($\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$) e idempotente ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$). Para que esto se cumpla, los valores no nulos de los parámetros deben ser $\alpha = 1/10$, $\beta = 10$ y $\gamma = 3$.

2. El subespacio donde proyecta la matriz \mathbf{P}_{proy} coincide tanto con su imagen como con el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$. Es decir, se trata del subespacio

$$L \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right].$$

3. a) Los valores propios de \mathbf{P}_{err} son $\lambda = 2$ (con subespacio propio asociado $L[(1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10})^T]$), $\lambda = 1/2$ (con subespacio propio asociado $L[(0, 1, 0)^T]$) y $\lambda = 0$ (con subespacio propio asociado $L[(3/\sqrt{10}, 0, -1/\sqrt{10})^T]$).
- b) El vector $\mathbf{a} = (2, 0, 6)^T$, al pertenecer al subespacio de proyección de \mathbf{P}_{proy} , es vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$, por lo que su transformada por \mathbf{P}_{proy} coincide con \mathbf{a} (o sea, \mathbf{P}_{proy} proyecta \mathbf{a} sobre sí mismo). La norma euclídea de \mathbf{a} es $\sqrt{40}$, que es menor que 10, insuficiente para provocar el disparo de los airbags.
- Por otro lado, \mathbf{a} pertenece al subespacio propio de \mathbf{P}_{err} asociado a $\lambda = 2$, por lo que su transformada por \mathbf{P}_{err} es el vector $(4, 0, 12)^T$, cuya norma euclídea es $\sqrt{160}$, que sí es mayor que 10. Por lo tanto, usando \mathbf{P}_{err} el vector \mathbf{a} sí hace que los airbags se disparen.