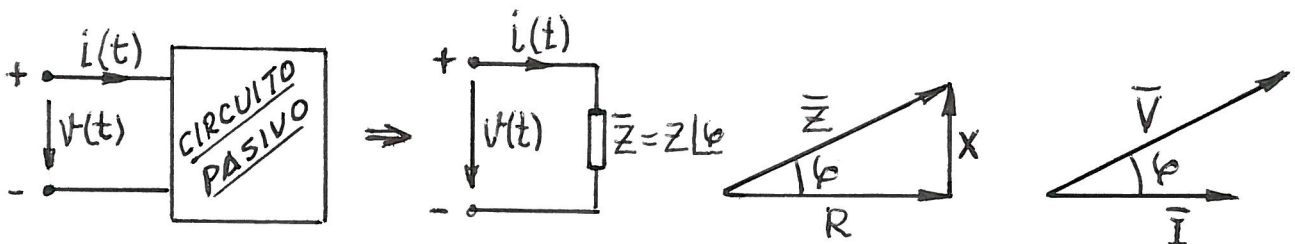


3.1 POTENCIA INSTANTÁNEA Y ACTIVA DE UN CIRCUITO PASIVO EN RÉGIMEN DE C.A. SINUSOIDAL

Al tratar de la potencia y energía en régimen estacionario sinusoidal, hablaremos en general de:

- Receptor : Elemento que absorbe energía
- Generador : Elemento que suministra energía

Consideremos una red lineal pasiva, equivalente a una impedancia $\bar{Z} = Z \angle \phi = R + jX$



$$\text{Si } i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t \Rightarrow \underline{\bar{I}} = I \angle 0^\circ$$

$$\underline{\bar{V}} = \underline{\bar{I}} \cdot \bar{Z} = I \angle 0^\circ \cdot Z \angle \phi = IZ \angle \phi = \underline{\bar{V}} \angle \phi \Rightarrow v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \phi)$$

Potencia instantánea = $p(t) = v(t) \cdot i(t) = 2VI \cos(\omega t + \phi) \cdot \cos \omega t$
 (ABSORBIDA)

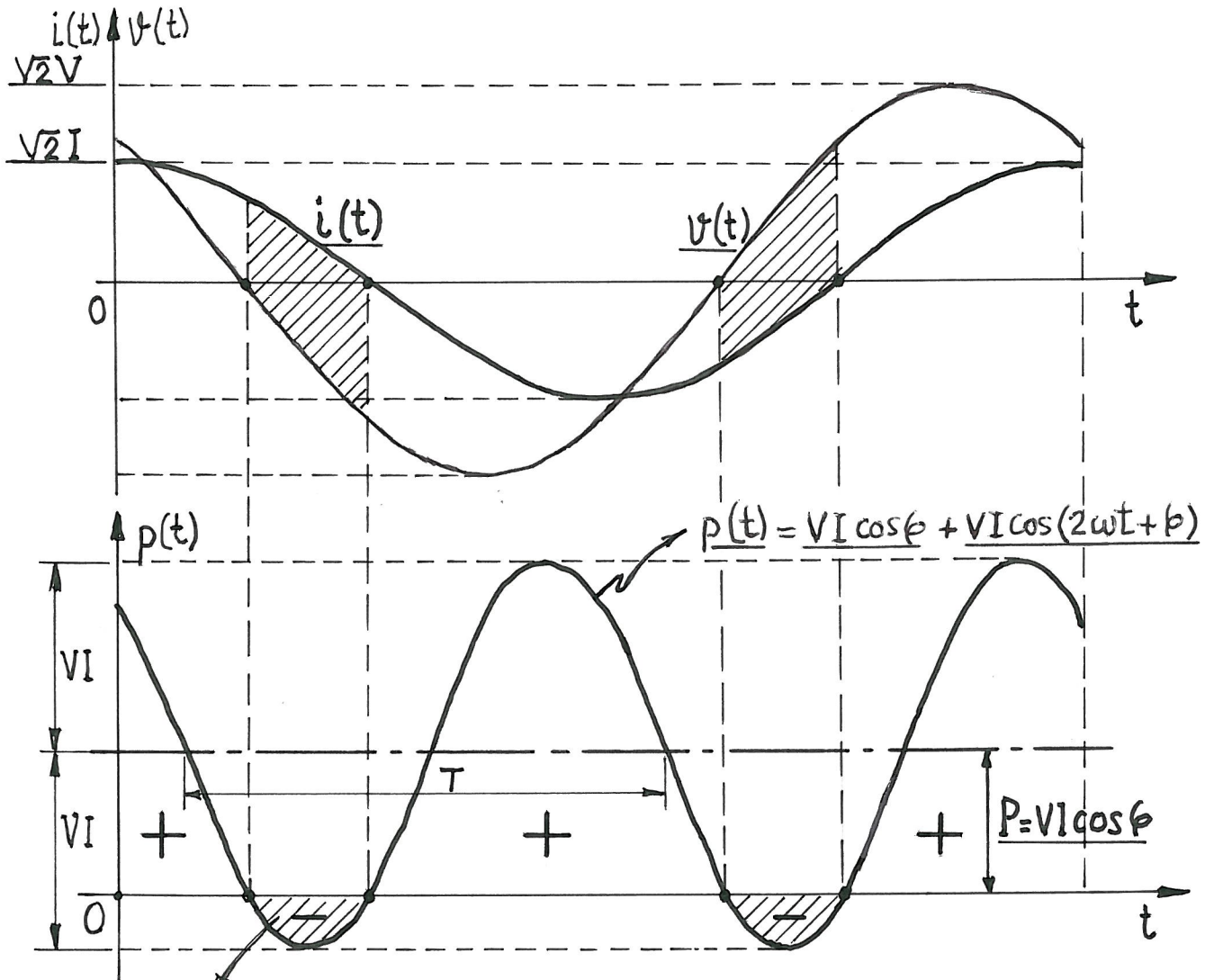
↳ según las referencias de caída de tensión e intensidad con el mismo sentido, como corresponde a un receptor pasivo.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

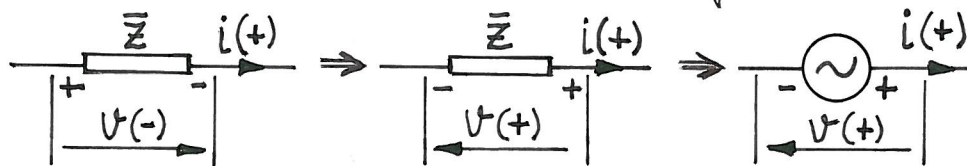
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\underline{\bar{p}}(t) = VI [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] = \underbrace{VI \cos \phi}_{\text{cte.}} + \underbrace{VI \cos(2\omega t + \phi)}_{\substack{\text{sinusoide de frecuencia} \\ \text{doble de la de } v(t) \text{ e } i(t)}}$$



El receptor absorbe potencia \ominus \Rightarrow Cede potencia a la red y actúa de generador:

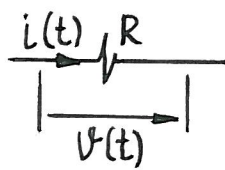


$$\text{Potencia activa (media o real)} = \underline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T [VI \cos \phi + VI \cos(2\omega t + \phi)] \cdot dt = \underline{VI \cos \phi \text{ (wattios)}}$$

$\cos \phi =$ factor de potencia (f.d.p.)

- Resistencia:

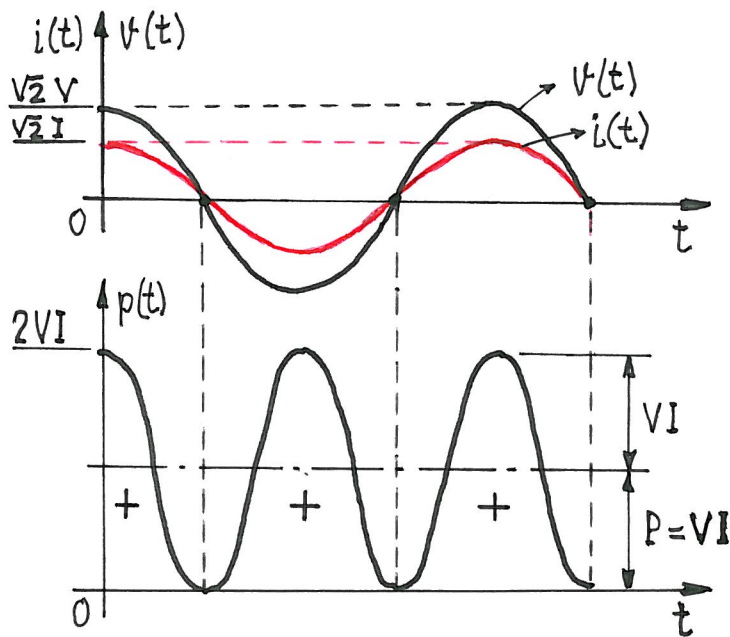


$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t$$

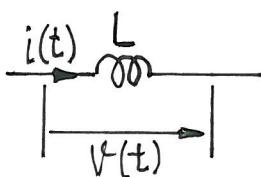
$$v(t) = \sqrt{2} V \cos \omega t ; \underline{V=IR} ; \underline{I=V/R}$$

$$\underline{p(t) = v(t) \cdot i(t) = 2VI \cos^2 \omega t = \underline{VI(1 + \cos 2\omega t)}}$$

- 1º) Siempre es $\underline{p(t) \geq 0}$, y de frecuencia de oscilación doble de la de $v(t)$ e $i(t)$.
- 2º) $\underline{P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \underline{VI = RI^2 = V^2/R}} \Rightarrow \begin{cases} \text{También } \phi=0 ; \underline{\bar{Z}_R = R \angle 0^\circ} \\ \underline{P = VI \cos 0^\circ = \underline{VI}} \end{cases}$
- 3º) Amplitud máxima de $p(t) = 2VI = V_m \cdot I_m$



- Bobina:



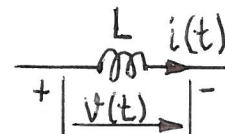
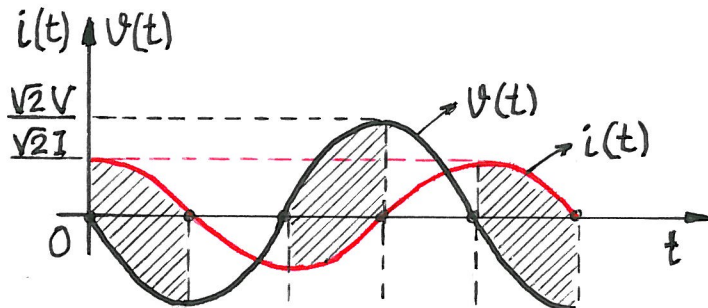
$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t$$

$$v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + 90^\circ) = -\sqrt{2} V \sin \omega t$$

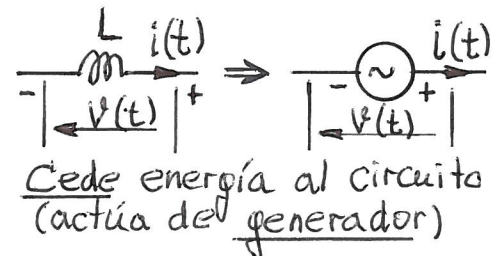
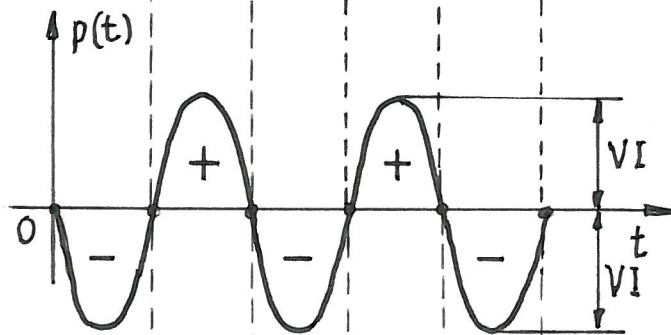
$$\underline{V = \omega L I = X_L I} ; \underline{I = V/X_L}$$

$$\underline{p(t) = v(t) \cdot i(t) = -2VI \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \underline{-VI \sin 2\omega t}}$$

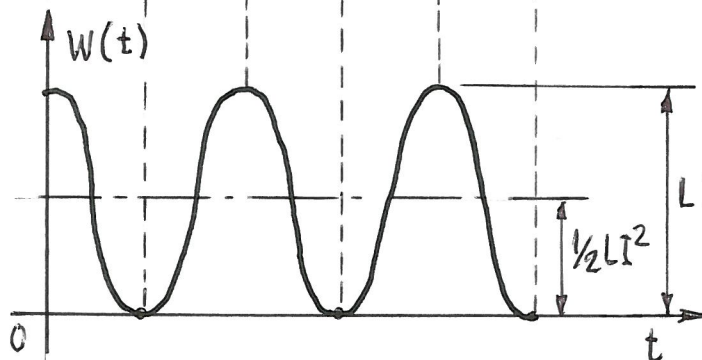
- 1º) $p(t)$ es puramente sinusoidal, y de frecuencia de oscilación doble de la de $v(t)$ e $i(t)$.
- 2º) $\underline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{También } \phi = 90^\circ; \bar{Z}_L = X_L \angle 90^\circ \\ P = VI \cos 90^\circ = 0 \end{cases}$
- 3º) Amplitud de la oscilación = $\underline{VI} = X_L I^2 = V^2/X_L$



Absorbe energía del circuito
(actúa de receptor)



Cede energía al circuito
(actúa de generador)



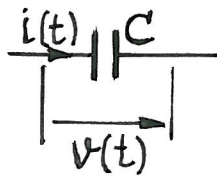
$LI^2 =$ Energía magnética
máxima almacenada
en la bobina

$$v = L \frac{di}{dt}; \quad p = v \cdot i = Li \frac{di}{dt}; \quad dw = p \cdot dt = Li di$$

La energía magnética instantánea almacenada por la bobina será:

$$\underline{w(t) = L \int i di = \frac{1}{2} Li^2 = LI^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} LI^2 [1 + \cos 2\omega t]}$$

- Condensador: $i(t) = \sqrt{2} \cos \omega t$

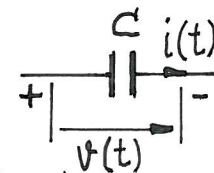
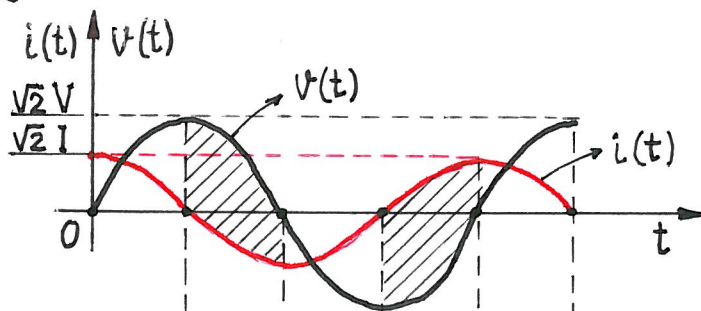


$$v(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ) = \sqrt{2} \sin \omega t$$

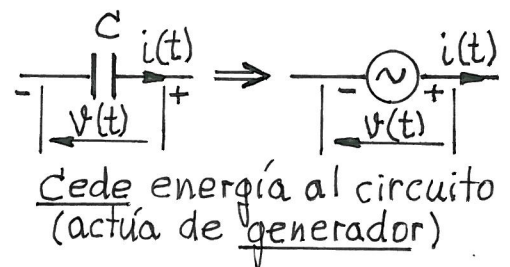
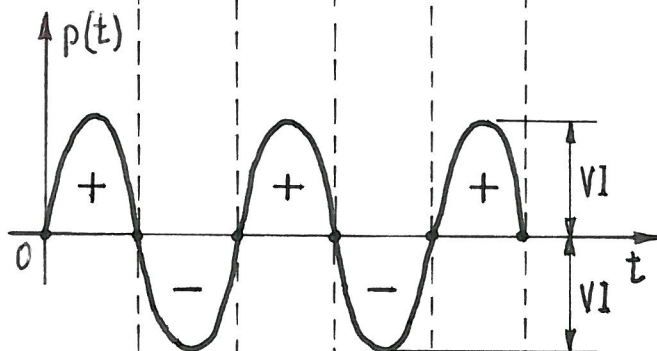
$$\underline{V} = I / \omega C = X_c I ; I = V / X_c$$

$$\underline{p(t)} = v(t) \cdot i(t) = 2VI \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \underline{VI \sin 2\omega t}$$

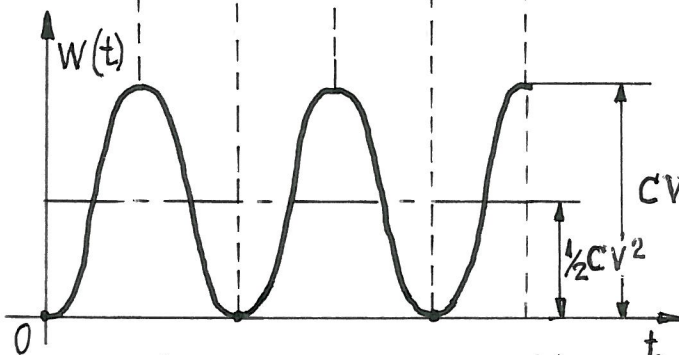
- 1º) $p(t)$ es puramente sinusoidal, y de frecuencia de oscilación doble de la de $v(t)$ e $i(t)$.
- 2º) $\underline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{También } \varphi = -90^\circ; \underline{Z}_c = X_c \angle -90^\circ \\ P = VI \cos(-90^\circ) = 0 \end{cases}$
- 3º) Amplitud de la oscilación = $\underline{VI = X_c I^2 = V^2 / X_c}$



Absorbe energía del circuito
(actúa de receptor)



Cede energía al circuito
(actúa de generador)



$CV^2 =$ Energía del campo eléctrico máxima almacenada por el condensador


$$i = C \frac{dv}{dt} ; p = v \cdot i = C v \cdot \frac{dv}{dt} ; dw = p \cdot dt = C v \cdot dv$$

La energía instantánea del campo eléctrico almacenada por el condensador será:

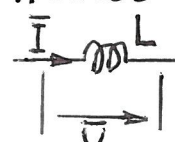
$$\underline{w(t) = C \int v \cdot dv = \frac{1}{2} C v^2 = CV^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} CV^2 [1 - \cos 2\omega t]}$$

3.2 POTENCIA REACTIVA DE REACTANCIAS

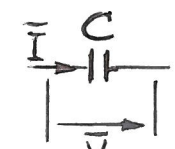
En el apartado anterior hemos visto que:



$$P = VI \cos 0^\circ = RI^2$$

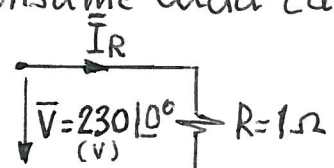


$$P = VI \cos 90^\circ = 0$$

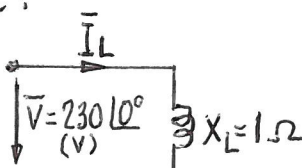


$$P = VI \cos(-90^\circ) = 0$$

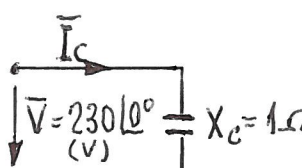
Por otro lado, calculemos en los circuitos adjuntos la intensidad que consume cada carga:



$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{230}{1} = 230 \text{ A}$$



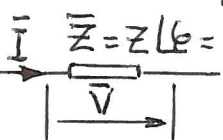
$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{230}{1} = 230 \text{ A}$$



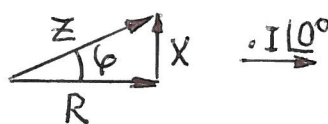
$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{230}{1} = 230 \text{ A}$$

Si se colocase un contador de energía activa en cada circuito, tan sólo el circuito resistivo marcaría energía consumida. Las reactancias X_L y X_C no marcarían energía activa consumida y, sin embargo, "consumen intensidad" como el circuito resistivo.

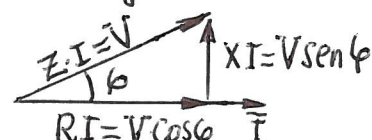
Para considerar este efecto, se define el concepto de potencia reactiva de una reactancia, como la amplitud de la oscilación de su potencia instantánea activa que, sin contribuir a incrementar la potencia activa de una impedancia, hace que las oscilaciones de la potencia activa sean mayores y, por tanto, para una tensión dada, que la intensidad consumida sea mayor.



$$\bar{I} \quad \bar{Z} = Z \angle \phi = R + jX$$



$$\bar{I} \angle 0^\circ$$



$$RI = V \cos \phi \quad XI = V \sin \phi$$

$$\text{Potencia reactiva} = Q = X I^2 = X I \cdot I = \underline{VI \sin \phi}$$

(ABSORBIDA)

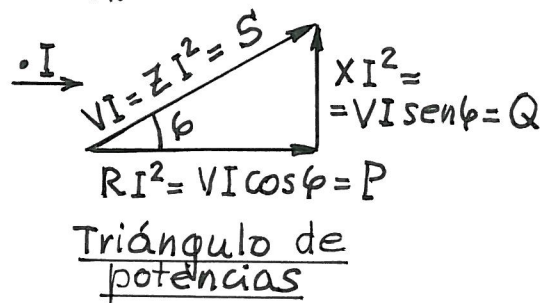
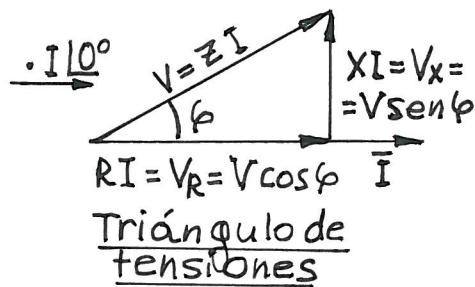
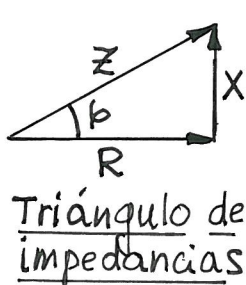
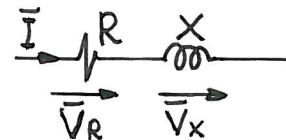
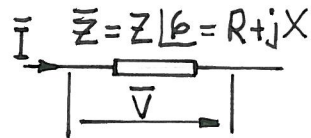
Unidad de Q (S.I.) = VAR (voltio-amperio reactivo); múltiplo 1 KVAR = 10^3 VAR

- Carga resistiva pura: $\phi = 0 \Rightarrow Q = 0$
- Carga inductiva: $\phi > 0 \Rightarrow Q > 0$ (Receptor de pot. reactiva)
- Carga capacitiva: $\phi < 0 \Rightarrow Q < 0$ (Generador de pot. reactiva)

3.3 POTENCIA APARENTE. TRIÁNGULO DE POTENCIAS

c.c. $\rightarrow P = VI$

c.a. $\rightarrow \begin{cases} P = VI \cos \phi \\ \text{Potencia aparente} = \underline{S} = VI \end{cases}$ Unidades
 $\left\{ \begin{array}{l} VA \text{ (S.I.)} \\ KVA = 10^3 VA \text{ ("cavea")} \\ MVA = 10^6 VA \end{array} \right.$



$$S = VI = ZI^2 = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{tg } \phi = Q/P$$

$$P = S \cdot \cos \phi ; \quad Q = S \cdot \sin \phi \quad \cos \phi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \text{ (f.d.p.)}$$

- Potencia compleja

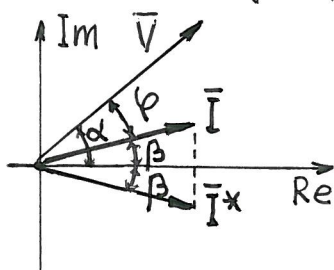
Es la potencia aparente representada en el plano complejo:

$$\underline{\bar{S}} = P + jQ = S \angle \phi = VI \angle \phi$$

En función de los fasores \bar{V} e \bar{I} , comprobaremos que

$$\underline{\bar{S}} = \bar{V} \times \bar{I}^* \quad \text{donde } \bar{I}^* = \text{conjugada de } \bar{I}$$

Ejemplos: $\bar{I} = 3 - j2 \Rightarrow \bar{I}^* = 3 + j2 \quad | \quad \bar{I} = 5 \rightarrow \bar{I}^* = 5$
 $\bar{I} = 10 \angle -20^\circ \Rightarrow \bar{I}^* = 10 \angle 20^\circ \quad | \quad \bar{I} = j4 \rightarrow \bar{I}^* = -j4$

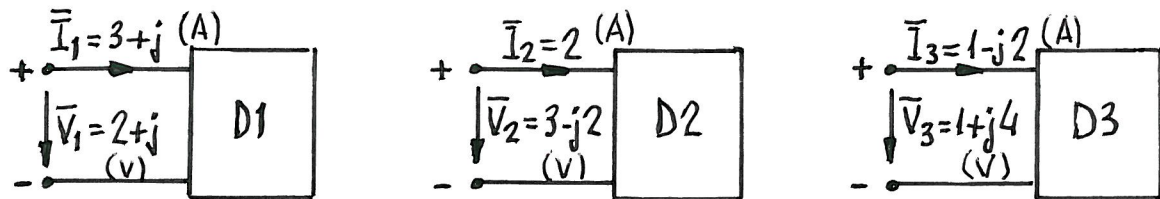


$$\bar{V} = V \angle \alpha$$

$$\bar{I} = I \angle \beta \rightarrow \bar{I}^* = I \angle -\beta$$

$$\underline{\bar{S}} = \bar{V} \bar{I}^* = V \angle \alpha \cdot I \angle -\beta = VI \angle (\alpha - \beta) = VI \angle \phi = \underline{S \angle \phi}$$

Ejemplo de aplicación 3.1.- En los dipolos de las figuras, determinar las potencias activas y reactivas consumidas e indicar la equivalencia de dichos dipolos.



Con las referencias consideradas de tensiones e intensidades (similares a una impedancia), el producto $\bar{V}_k \cdot \bar{I}_k^*$ es potencia absorbida:

$$\bar{S}_1 = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^* = (2+j)(3-j) = 7+j \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 7 \text{ W} \\ Q = 1 \text{ VAR} \end{array} \right. \Rightarrow \text{CARGA INDUCTIVA}$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{2+j}{3-j} = \frac{(2+j)(3-j)}{10} = 0,7 + j0,1 = 0,707 \angle 8,13^\circ \Omega$$

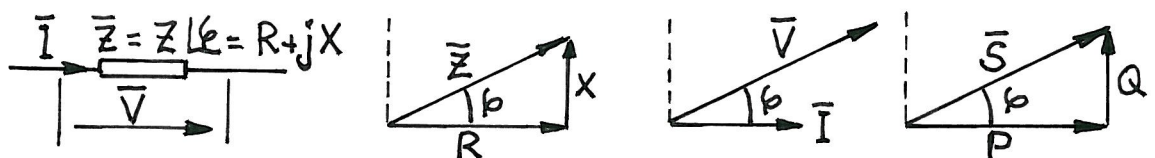
$$\bar{S}_2 = \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2^* = (3-j2) \cdot 2 = 6-j4 \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 6 \text{ W} \\ Q = -4 \text{ VAR} \end{array} \right. \Rightarrow \text{CARGA CAPACITIVA}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = \frac{3-j2}{2} = 1,5 - j = 1,803 \angle -33,690^\circ \Omega$$

$$\bar{S}_3 = \bar{V}_3 \cdot \bar{I}_3^* = (1+j4)(1+j2) = -7+j6 \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -7 \text{ W} < 0 \\ Q = 6 \text{ VAR} \end{array} \right. \Rightarrow \text{GENERADOR}$$

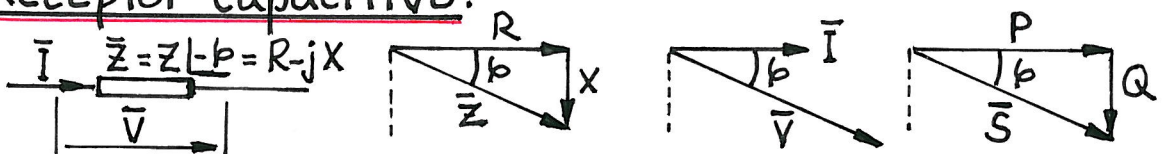
- Potencias en componentes:

a) Receptor inductivo:



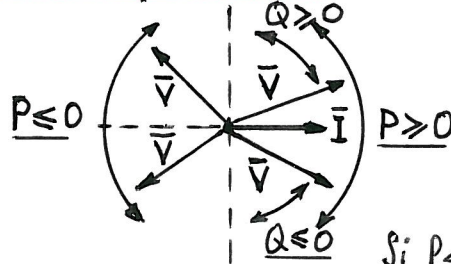
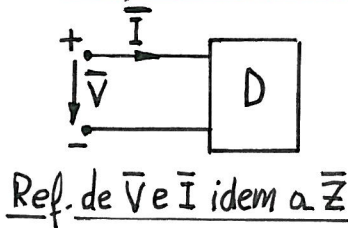
$$0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \Rightarrow \boxed{\phi \geq 0^\circ} \quad \boxed{P \geq 0} \quad \boxed{Q \geq 0}$$

b) Receptor capacitivo:



$$-90^\circ \leq \phi \leq 0^\circ \Rightarrow \boxed{\phi \leq 0^\circ} \quad \boxed{P \geq 0} \quad \boxed{Q \leq 0}$$

c) Dipolo (activo o pasivo):

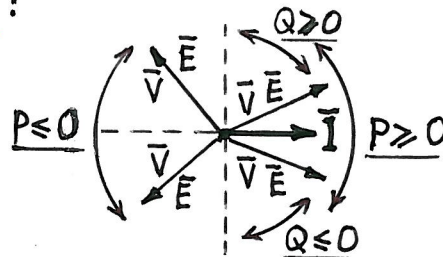
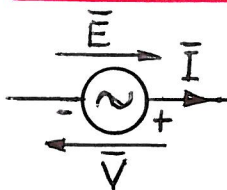


$$P = VI \cos \phi \begin{cases} \geq 0 & \text{Receptor} \\ \leq 0 & \text{Generador} \end{cases}$$

$$Q = VI \sin \phi \begin{cases} \geq 0 & \text{R. induct.} \\ \leq 0 & \text{R. capacit.} \end{cases}$$

Si $P < 0$, cambiar sentido de \bar{V} ó de \bar{I} (uno sólo) para que P y Q sean cedidas, idem a un generador.

d) Generador:



$$P = VI \cos \phi \begin{cases} \geq 0 & \text{Generador} \\ \leq 0 & \text{Receptor} \end{cases}$$

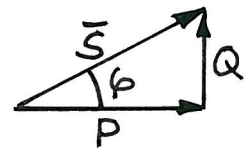
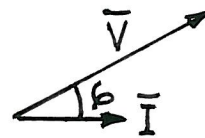
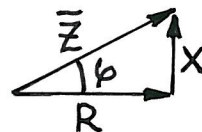
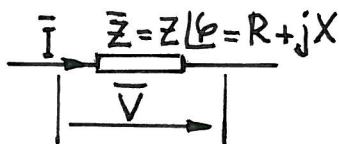
$$P = EI \cos \phi$$

$$Q = VI \sin \phi \begin{cases} \geq 0 & \text{G. induct.} \\ \leq 0 & \text{G. capacit.} \end{cases}$$

$$Q = EI \sin \phi$$

Si $P < 0$, cambiar sentido de \bar{V} ó de \bar{I} (uno sólo) para que P y Q sean absorbidas, idem a una impedancia

RESUMEN DE POTENCIAS (C.A.)



$V =$ valor eficaz de la tensión $= \frac{V_m}{\sqrt{2}}$

$I =$ valor eficaz de la corriente $= \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

$\phi =$ desfase de \bar{V} respecto de $\bar{I} = \alpha_V - \alpha_I$

$\cos \phi =$ f.d.p. $= R/Z = P/S = \cos(\text{arc. tg } Q/P)$

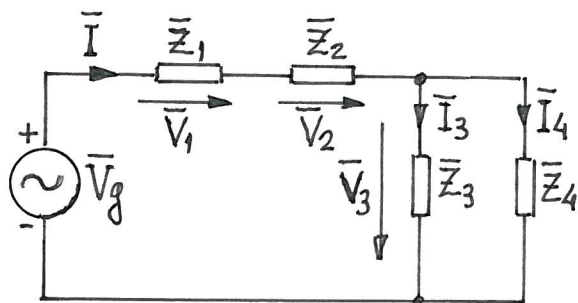
- Potencia instantánea $= p = v \cdot i = VI [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)]$ (w, kw)
- Potencia activa $= P = VI \cos \phi = RI^2 = S \cos \phi$ (w, Kw)
- Potencia reactiva $= Q = VI \sin \phi = (\pm) XI^2 = S \sin \phi$ (VAr, kVAr)
- Potencia aparente $= S = VI = Z^2 I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (VA, KVA)
- Potencia compleja $= \bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = P + jQ = S \angle \phi = VI \angle \phi$

TEOREMA DE BOUCHEROT $\Rightarrow \sum P_g = \sum P_z ; \sum Q_g = \sum Q_z$

3.4 TEOREMA DE BOUCHEROT

"Para una frecuencia constante, en un circuito cualquiera, hay conservación de la potencia activa por un lado y de la potencia reactiva por otro."

Aunque la conservación de la potencia activa es una simple consecuencia del "principio de conservación de la energía", comprobemos que también se produce una conservación de la potencia reactiva. Consideremos, para ello, el circuito adjunto, con varias impedancias en serie y en paralelo, alimentadas por una fuente de tensión de c.a. sinusoidal:



$$\begin{aligned}\bar{S}_g &= P_g + jQ_g = \bar{V}_g \cdot \bar{I}^* = (\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3) \cdot \bar{I}^* \\ &= \bar{V}_1 \cdot \bar{I}^* + \bar{V}_2 \cdot \bar{I}^* + \bar{V}_3 (\bar{I}_3 + \bar{I}_4)^* = \bar{S}_{Z_1} + \\ &+ \bar{S}_{Z_2} + \bar{V}_3 \cdot \bar{I}_3^* + \bar{V}_3 \cdot \bar{I}_4^* = \bar{S}_{Z_1} + \bar{S}_{Z_2} + \bar{S}_{Z_3} + \\ &+ \bar{S}_{Z_4} = \sum \bar{S}_Z = (P_{Z_1} + jQ_{Z_1}) + (P_{Z_2} + jQ_{Z_2}) + \\ &+ (P_{Z_3} + jQ_{Z_3}) + (P_{Z_4} + jQ_{Z_4}) = \sum P_Z + j \sum Q_Z\end{aligned}$$

Identificando partes reales e imaginarias y generalizando para varios generadores:

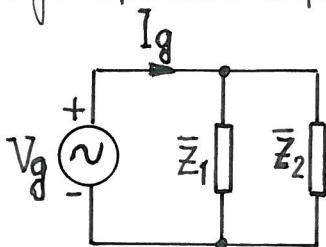
$$\left. \begin{aligned}\sum P_g &= \sum P_Z \\ \sum Q_g &= \sum Q_Z\end{aligned} \right\} \sum \bar{S}_g = \sum \bar{S}_Z$$

Observamos que $\sum \bar{S}_g = \sum \bar{S}_Z$, pero es evidente que $\sum S_g \neq \sum S_Z$ ya que el módulo de una suma vectorial no es igual a la suma de los módulos de los sumandos.

El Teorema de Boucherot nos permite realizar, independientemente, un balance de potencias activas, y otro balance de potencias reactivas, ya que estas magnitudes son escalares.

- Nota resumen : Como resumen de todas las magnitudes vectoriales/complejas $\{\bar{V}, \bar{I}$ (fasores ambos), \bar{Z} y $\bar{S}\}$ que intervienen en el estudio de los circuitos de c.a. sinusoidal, diremos que: "Para sumar algebraicamente (+/-): tensiones eficaces, intensidades eficaces, impedancias y potencias aparentes, tener siempre en cuenta su carácter vectorial/complejo."

Ejemplo de aplicación 3.2.- En el circuito de la figura, alimentado por c.a., tensión $V_g = 230\text{ V}$, las impedancias \bar{Z}_1 y \bar{Z}_2 consumen las siguientes potencias:



$$\bar{Z}_1 \begin{cases} 8 \text{ Kw} \\ 5 \text{ KVAR} \end{cases} \quad \bar{Z}_2 \begin{cases} 4 \text{ Kw} \\ -3 \text{ KVAR} \end{cases}$$

Calcular el valor de la intensidad I_g que proporciona el generador.

\bar{Z}_1 es una impedancia inductiva ($P > 0, Q > 0$)

\bar{Z}_2 es una impedancia capacitiva ($P > 0, Q < 0$)

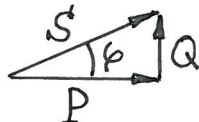
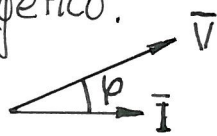
Por Boucherot:

$$\left. \begin{aligned} P_g &= \sum P_z = P_1 + P_2 = 8 + 4 = 12 \text{ Kw} \\ Q_g &= \sum Q_z = Q_1 + Q_2 = 5 - 3 = 2 \text{ KVAR} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S_g &= \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = \\ &= \sqrt{12^2 + 2^2} = \underline{12,166 \text{ KVA}} \end{aligned}$$

$$S_g = V_g \cdot I_g \Rightarrow \boxed{I_g = \frac{S_g}{V_g} = \frac{12166}{230} = \underline{52,89 \text{ A}}}$$

3.5 FACTOR DE POTENCIA : SU IMPORTANCIA PRÁCTICA

Como veremos más adelante, el f.d.p. de una instalación eléctrica expresa su grado de aprovechamiento en el suministro energético.



$$\boxed{\text{f.d.p.} = \cos \phi = P/S}$$

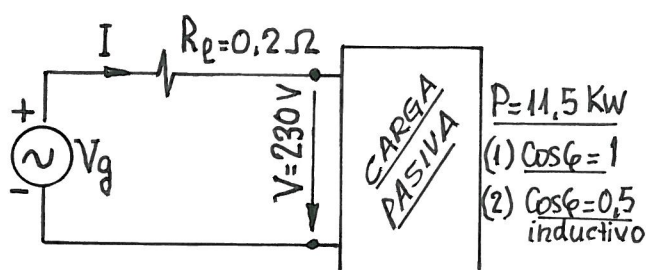
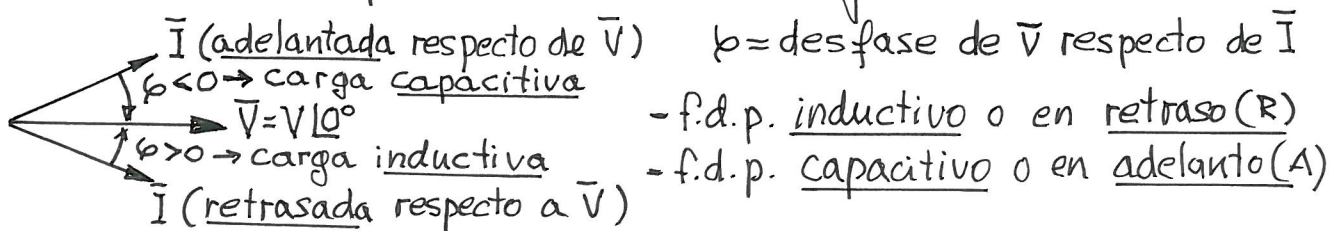
- Para cargas resistivas puras $\Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \cos \phi = 1$
 - Para cargas reactivas puras $\Rightarrow \phi = \pm 90^\circ \Rightarrow \cos \phi = 0$
- En impedancias:
 $0 \leq \cos \phi \leq 1$

$$\cos \phi = 0,5 \Rightarrow \phi = \pm 60^\circ \begin{cases} +60^\circ \rightarrow \text{carga inductiva} \\ -60^\circ \rightarrow \text{carga capacitiva} \end{cases}$$

Para que el f.d.p. quede totalmente definido, se requiere dar su valor e indicar su carácter (inductivo o capacitivo). Así, en el ejemplo anterior, si $\cos \phi = 0,5 \text{ ind.} \Rightarrow \phi = +60^\circ$ (valor único)

A veces, en determinada bibliografía se habla de f.d.p. en retraso (R) o en adelanto (A).

Como en muchas ocasiones se toma \bar{V} como origen de fases, se define el f.d.p. de las dos formas siguientes:



Para entender mejor el concepto del f.d.p. veamos el suministro de energía eléctrica a distancia, considerando un generador de c.a., tensión V_g , una línea eléctrica

de resistencia $R_e = 0,2 \Omega$, y una carga pasiva que consume una potencia activa de $11,5 \text{ kW}$, con tensión de alimentación constante de valor 230 V , en dos supuestos: (1) carga con $\cos \phi = 1$, y (2) carga con $\cos \phi = 0,5$ ind.

Tomaremos como referencia el fasor $\bar{V} = V \angle 0^\circ = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$

(1) $\cos \phi = 1$ ($\phi = 0^\circ$):

$$P = VI \cos \phi \Rightarrow I = \frac{P}{V \cos \phi} = \frac{11500}{230 \times 1} = \underline{50 \text{ A}}$$

$$Q = VI \sin \phi = 230 \times 50 \times 0 = \underline{0}$$

$$\text{Pot. perdida en la línea: } P_p = R_e \cdot I^2 = 0,2 \times 50^2 = \underline{500 \text{ W}}$$

$$\text{Pot. cedida por el generador: } P_g = P + P_p = 11500 + 500 = \underline{12000 \text{ W}}$$

$$\text{Tensión en el generador: } \bar{V}_g = \bar{V} + R \cdot \bar{I} = 230 \angle 0^\circ + 0,2 \times 50 \angle 0^\circ = \underline{240 \angle 0^\circ \text{ V}}$$

$$\text{Pot. aparente del generador: } S_g = V_g \cdot I = 240 \times 50 = \underline{12000 \text{ VA}}$$

$$\text{Rendimiento de la instalación: } \eta = \frac{P}{P_g} = \frac{11500}{12000} = \underline{95,8\%}$$

(2) $\cos \phi = 0,5$ ind ($\phi = +60^\circ$):

$$P = VI \cos \phi \Rightarrow I = \frac{P}{V \cos \phi} = \frac{11500}{230 \times 0,5} = \underline{100 \text{ A}}$$

$$Q = VI \sin \phi = 230 \times 100 \times \sin 60^\circ = \underline{19.919 \text{ VAR}}$$

$$P_p = R_e \cdot I^2 = 0,2 \times 100^2 = \underline{2000 \text{ W}} ; P_g = P + P_p = 11500 + 2000 = \underline{13500 \text{ W}}$$

$$\bar{V}_g = \bar{V} + R \bar{I} = 230 \angle 0^\circ + 0,2 \times 100 \angle -60^\circ = \underline{240,62 \angle -4,13^\circ \text{ V}}$$

$$S_g = V_g \cdot I = 240,62 \times 10 = \underline{24062 \text{ VA}} ; \text{Rendim.} = \eta = \frac{P}{P_g} = \frac{11500}{13500} = \underline{85,2\%}$$

(1) $P=11,5 \text{ Kw}$ $\cos\phi=1 (\phi=0^\circ)$	(2) $P=11,5 \text{ Kw}$ $\cos\phi=0,5 \text{ ind.}$
$I=50 \text{ A}$	$I=100 \text{ A}$
$Q=0$	$Q=19919 \text{ VAR}$
$P_p=500 \text{ W}$	$P_p=2000 \text{ W}$
$P_g=12000 \text{ W}$	$P_g=13500 \text{ W}$
$V_g=240 \text{ V}$	$V_g=240,62 \text{ V}$
$S_g=12000 \text{ VA}$	$S_g=24062 \text{ VA}$
$\eta=95,8\%$	$\eta=85,2\%$

Vemos pues que, cuanto menor es el f.d.p. (o sea mayor ϕ) se tiene: Mayor intensidad de línea, mayor pot. reactiva, mayores pérdidas en la línea, mayor tensión en el generador, mayor potencia aparente en el generador y menor rendimiento de la instalación.

En definitiva que cuanto más pequeño es el f.d.p. de la instalación tanto más caro resulta el suministro de energía eléctrica, de ahí que haya una penalización por utilizar pequeño f.d.p. (generalmente por debajo de 0,95 ó 0,90 ind), cobrando las compañías suministradoras un recargo de energía reactiva consumida.

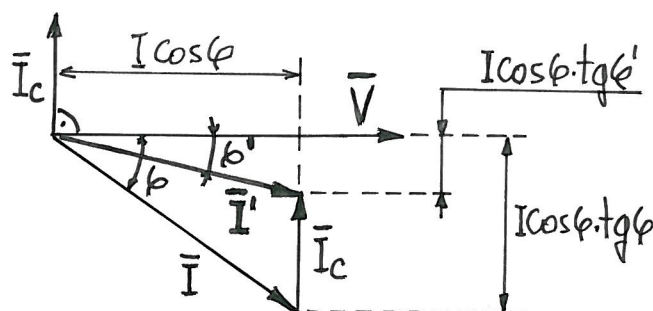
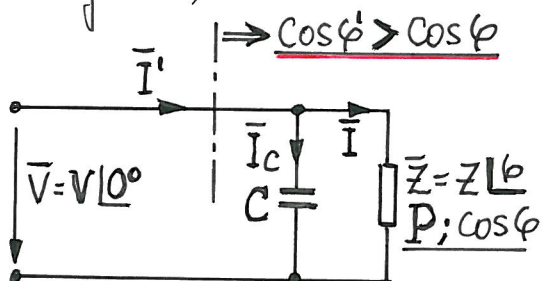
3.6 CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

En general, las cargas eléctricas son de carácter inductivo, así, los transformadores y motores por sus devanados, y las lámparas de descarga por sus reactancias de cebado y/o de estabilización (balastos). Por tanto, estas cargas inductivas consumen energía reactiva que pueden proporcionar unos condensadores (generadores de potencia reactiva) colocados en paralelo con las cargas, sin tener por ello que solicitarla a la red de alimentación. De esta forma corregimos el f.d.p. resultante del conjunto carga-condensadores a valores que sean no penalizantes en la facturación eléctrica.

Previo a la corrección del f.d.p. conviene, no obstante, destacar algunos aspectos a tener en cuenta para evitar en lo posible un bajo f.d.p. de la instalación, así:

1º) No utilizar motores con bajo índice de carga, sustituyéndolos por motores que trabajen próximos a sus condiciones nominales, ya que éstos tienen mejor rendimiento y más alto f.d.p.

- 2º) Utilizar transformadores con pocas pérdidas en vacío y desconectar los transformadores cuando se para la instalación.
 3º) Para las lámparas de descarga (fluorescentes, vapor de mercurio y de sodio) comprobar que llevan su propio condensador. Las lámparas incandescentes (bombillas), estándar y halógenas, son resistivas puras ($\cos\phi=1$).



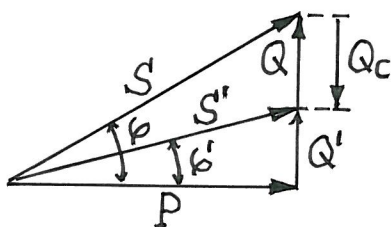
$$I_c = I \cos\phi (\tan\phi - \tan\phi')$$

$$V = X_c \cdot I_c = \frac{1}{\omega C} I_c \Rightarrow C = \frac{I_c}{\omega V}$$

La potencia reactiva de los condensadores será:

$$Q_c = V I_c |\sin(-90^\circ)| = V I_c = V I \cos\phi (\tan\phi - \tan\phi') = P (\tan\phi - \tan\phi')$$

A este mismo resultado hubiésemos llegado de forma inmediata usando los triángulos de potencia, antes y después de corregir el f.d.p., así:



$$Q_c = P (\tan\phi - \tan\phi')$$

$$Q_c = \frac{V^2}{X_c} = \frac{V^2}{1/\omega C} = \omega C V^2 \Rightarrow C = \frac{Q_c}{\omega V^2}$$

$$I_c = \frac{V}{X_c} = \frac{V}{1/\omega C} = \omega C V$$

$$\text{También: } Q_c = V \cdot I_c \Rightarrow I_c = \frac{Q_c}{V}$$

La intensidad que absorbe la carga

(1) antes de corregir el f.d.p.: $P = V I \cos\phi \Rightarrow I = \frac{P}{V \cos\phi}$

(2) después de corregir el f.d.p.: $P = V I' \cos\phi' \Rightarrow I' = \frac{P}{V \cos\phi'}$

También: $P = V I \cos\phi = V I' \cos\phi' \Rightarrow I' = I \cdot \frac{\cos\phi}{\cos\phi'}$

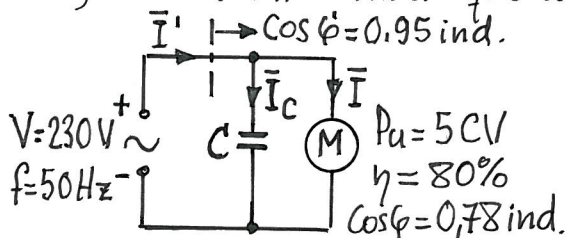
o por fasores: $I' = I + I_c = I \angle -\phi + I_c \angle +90^\circ$

En la práctica existen baterías de condensadores normalizadas a unas potencias reactivas definidas, en las que se indica la tensión de utilización.

Potencias reactivas estándar : 0,5-1-1,5-2-2,5-3-4-5-6-8-10-12-15-20-25 kVAr

La corrección del f.d.p. puede realizarse de forma distribuida (Cada carga tiene sus condensadores de corrección) o de forma centralizada, a la entrada de la instalación, mediante baterías autorreguladas de condensadores, que permiten un escalonamiento automático de los condensadores en función de las potencias reactivas requeridas en cada momento. Es evidente que con la corrección centralizada se optimizan los condensadores necesarios. No obstante, en la práctica suele usarse un sistema mixto de corrección del f.d.p.: distribuido para grandes cargas y centralizado para el resto de cargas.

Ejemplo de aplicación 3.3.- Se tiene un motor eléctrico de potencia nominal 5 CV, rendimiento 80%, $\cos\phi = 0,78 \text{ ind}$, alimentado con c.a., tensión 230V, frecuencia 50Hz. 1º) Calcular la intensidad que absorbe el motor. 2º) Se desea corregir el f.d.p. del motor a 0,95 ind. Determinar: a) Capacidad equivalente de los condensadores necesarios. b) Intensidad que absorben los condensadores. c) Nueva intensidad que absorbe de la red el conjunto motor-condensadores.



$$1^\circ) \eta = \frac{P_u}{P} \Rightarrow \frac{\text{Potencia absorbida}}{P} = \frac{P_u}{\eta} = \frac{5 \cdot 736}{0,8} = 4600 \text{ W}$$

$$P = VI \cos\phi \Rightarrow I = \frac{P}{V \cos\phi} = \frac{4600}{230 \cdot 0,78} = \underline{25,64 \text{ A}}$$

$$2^\circ) \cos\phi' = 0,95 \text{ ind.}; \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \text{ r/s}$$

$$Q_c = P(\tan\phi - \tan\phi') = 4600 [\tan(\arccos 0,78) - \tan(\arccos 0,95)] = 2179 \text{ VAR}$$

$$a) Q_c = \frac{V^2}{1/\omega C} = \omega C V^2 \Rightarrow C = \frac{Q_c}{\omega V^2} = \frac{2179}{100\pi \cdot 230^2} \text{ F} = \underline{131 \mu\text{F}}$$

$$b) Q_c = V \cdot I_c \Rightarrow I_c = \frac{Q_c}{V} = \frac{2179}{230} = \underline{9,47 \text{ A}}$$

$$c) P = VI' \cos\phi' \Rightarrow I' = \frac{P}{V \cos\phi'} = \frac{4600}{230 \cdot 0,95} = \underline{21,05 \text{ A}}$$

$$\underline{\underline{\vec{I}' = \vec{I} + \vec{I}_c = 25,64 \angle -38,739^\circ + 9,47 \angle 90^\circ = 21,05 \angle -18,195^\circ \text{ A}}}$$

I' por fasores:

$$\vec{V} = 230 \angle 0^\circ$$

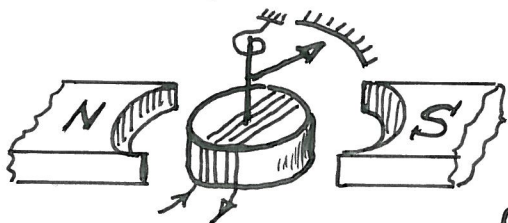
$$\phi = \arccos 0,78 = 38,739^\circ$$

$$\phi' = \arccos 0,95 = 18,195^\circ$$

3.7 APARATOS DE MEDIDAS ELÉCTRICAS

- Galvanómetro. Aparato destinado a medir el valor de la intensidad de la corriente eléctrica.

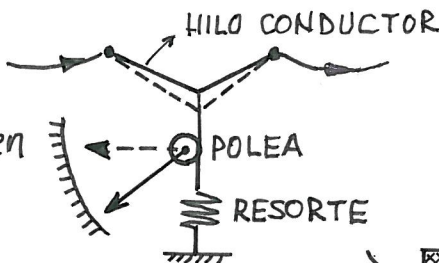
a) Sólo para c.c. (con imanes permanentes) ⇒ galvanómetro magnético



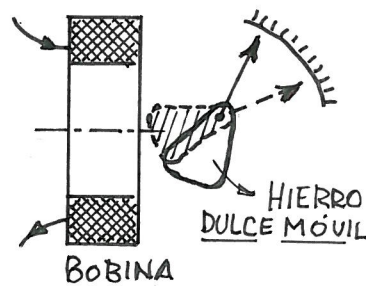
Se calibran por comparación con un galvanómetro patrón

b) Para c.c. y/o c.a. ⇒ { galvanóm. térmico
galvanóm. electromagnético
galvanóm. electrodinámico

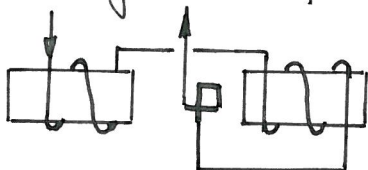
- g. térmico: Como no tiene bobina, para c.a. sirve para un margen amplio de frecuencias, incluso muy altas.



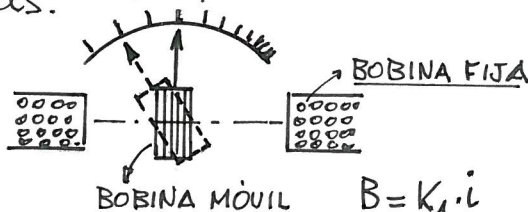
- g. electromagnético: Barato y robusto, de fiabilidad media. Como tienen bobina, para c.a. se construyen para un intervalo restringido de frecuencias.



- g. electrodinámico: Se construye para un intervalo restringido de frecuencias.



Circula la misma intensidad por las dos bobinas fija/móvil



$$B = K_1 \cdot i$$

$$M^{\pm 0} = K_2 \cdot B \cdot i = K' i^2$$

(escala no uniforme)

- Amperímetro. Se utiliza para medir la intensidad (en c.a., valor eficaz de la corriente). Equivale a un galvanómetro con resistencia/impedancia muy pequeña.

- Se coloca en serie con la carga cuya intensidad se quiere medir.

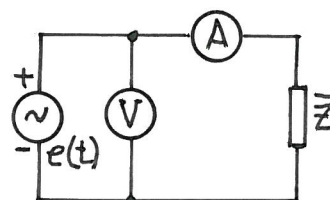
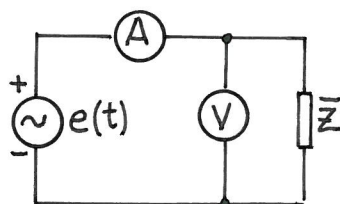
- Amperímetro ideal (equivale a un cortocircuito) $\Rightarrow \begin{cases} \text{en c.c.} \rightarrow R_A = 0 \text{ (real, p. ej: } R_A = 0,05\Omega) \\ \text{en c.a.} \rightarrow Z_A = 0 \end{cases}$

- Voltímetro. Sirve para medir la d.d.p. entre dos puntos (en c.a. valor eficaz de la tensión). Equivale a un galvanómetro con una resistencia muy grande en serie, por la que pasa una intensidad muy pequeña.

- Se coloca en paralelo con la carga cuya d.d.p. se quiere medir.

- Voltímetro ideal (equivale a un circuito abierto) $\Rightarrow \begin{cases} \text{en c.c.} \rightarrow R_V = \infty \text{ (real, p. ej: } R_V = 30.000\Omega) \\ \text{en c.a.} \rightarrow Z_V = \infty \end{cases}$

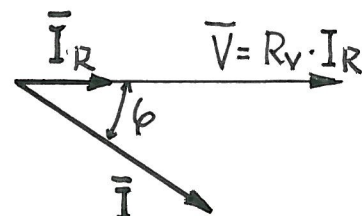
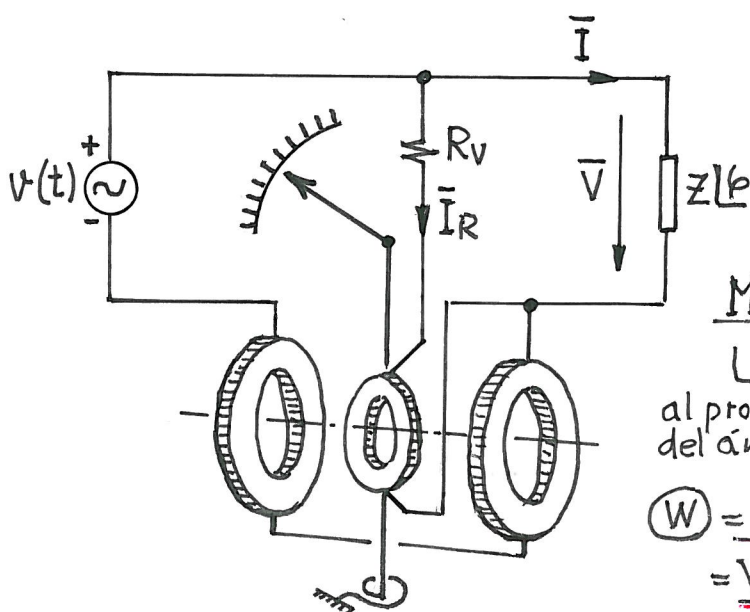
En las dos configuraciones adjuntas, si \textcircled{A} y \textcircled{V} se consideran ideales, ambas son equivalentes



Si se consideran reales \Rightarrow Mejor para Z pequeña (p. ej. $Z < 100\Omega$)

Mejor para Z grande (p. ej. $Z > 1000\Omega$)

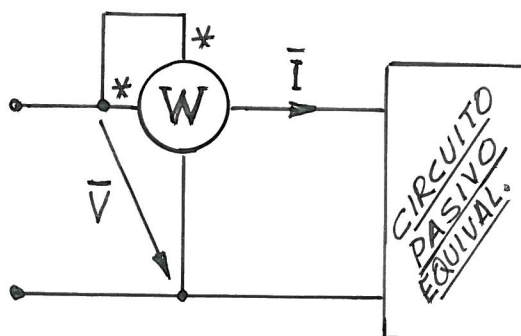
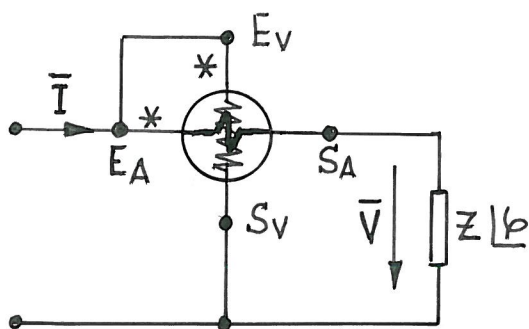
- Wattímetro. Sirve para medir la potencia activa (w) de la corriente eléctrica. La mayoría son del tipo electrodinámico:
 { - bobina amperimétrica (en serie con la carga)
 { - bobina voltimétrica (en paralelo con la carga)



$$M^{to} = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot i_r dt = K \cdot I_R \cdot I \cdot \cos \phi$$

\hookrightarrow El par medio es proporcional al producto de las intensidades y el coseno del ángulo que forman. Haciendo $K = R_V$:

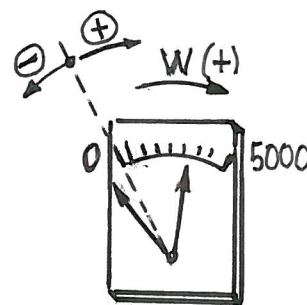
$$\textcircled{W} = K \cdot I_R \cdot I \cdot \cos \phi = R_V \cdot I_R \cdot I \cdot \cos \phi = \underline{V \cdot I \cdot \cos \phi = P_Z}$$



* = terminales correspondientes.
 (las dos entradas ⊕)

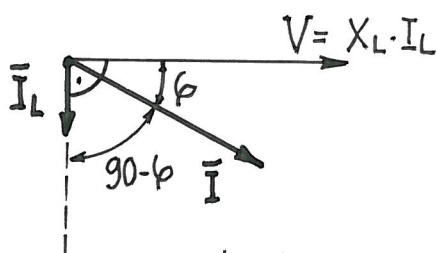
$(W) \Rightarrow P = \underline{V \cdot I \cdot \cos(\hat{V}, \hat{I})} = \underline{\text{Re}(\underline{V} \cdot \underline{I}^*)} =$
 = Consumo del circ. pasivo equivalente a la dcha. del (W), de pot. activa. \hookrightarrow parte real

- Si marca negativo (normalmente sólo mide ⊕):
 Para ver dicho valor (-), se intercambian los bornes de una de las bobinas del vatímetro (generalmente se hace con la voltimétrica para no interrumpir la alimentación de la carga: $E_V \rightarrow S_V // S_V \rightarrow E_V$). Si se intercambian los bornes de las dos bobinas seguiría marcando negativo



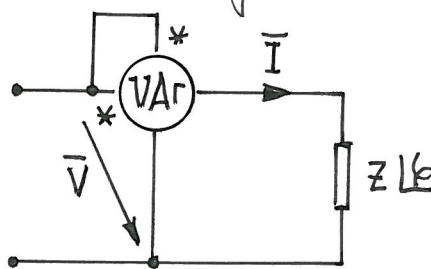
- Varímetro. Sirve para medir la potencia reactiva (VAR) de la corriente eléctrica.

Es similar al vatímetro: en vez de R_V en la bobina voltimétrica llevan una inducción L_V muy elevada y de resistencia muy pequeña.



Haciendo $k = X_L$:

$(VAR) = k \cdot \underline{I_L} \cdot \underline{I} \cdot \cos(90 - \phi) =$
 $= \underline{X_L \cdot \underline{I_L} \cdot \underline{I} \cdot \sin \phi} = \underline{V \cdot \underline{I} \cdot \sin \phi} = \underline{Q_Z}$



$(VAR) \Rightarrow Q = \underline{V \cdot I \cdot \sin(\hat{V}, \hat{I})} = \underline{\text{Im}(\underline{V} \cdot \underline{I}^*)} =$
 = Consumo de pot. reactiva de la imp. equivalente a la dcha. del (VAR) \hookrightarrow parte imagin.

3.8 FACTURACIÓN ELÉCTRICA

Debido a los continuos cambios que se han experimentado, sobre todo en los dos últimos años, y que periódicamente se siguen teniendo, en cuanto a la replacentación y precios aplicables a la facturación de la energía eléctrica, trataremos de establecer tan solo unas reglas que puedan ser aplicables con carácter general, dejando como "Propuesta de actividad complementaria para los alumnos", el desarrollo de un ejercicio particularizado de facturación a realizar en fecha establecida y con el alcance definido por la Cátedra de la Asignatura. Actualmente, los contratos de facturación eléctrica se realizan en el mercado liberalizado (similar al que se tiene con la telefonía), llevándose a cabo a través de una comercializadora, con la que se negocia un precio unitario sobre el consumo de energía activa, pagando además una tarifa de acceso (o peaje por el uso de las redes) con sus correspondientes impuestos.

La estructura actual de la facturación eléctrica es básicamente la siguiente:

A) FACTURACIÓN DE LA TARIFA DE ACCESO:

Tanto para el suministro eléctrico en baja tensión ($V < 1 \text{ kv}$) como en alta tensión ($V \geq 1 \text{ kv}$), existen diversas tarifas, con limitación de las potencias aplicables. Para cada tarifa, existen diferentes periodos tarifarios, que consideran diversos precios unitarios, tanto para el término de potencia como el de energía.

(1) - Término de facturación de potencia (TFP)

Depende de la potencia contratada en cada periodo tarifario.

$$TFP = \sum P_{fi} \times t_{pi}$$

- P_{fi} = potencia base de facturación (kw) en el periodo i
- t_{pi} = precio unitario (€/kw.mes) de la pot. en el periodo i

El control de la potencia contratada se puede realizar de dos formas diferentes, aplicables según tarifas:

- Sin maxímetro: La potencia facturada es igual a la potencia contratada. El control de la potencia se lleva a cabo mediante un Interruptor de Control de Potencia (ICP), que interrumpe el suministro en el caso de que exista una demanda de potencia mayor que la potencia contratada.
- Con maxímetro: La instalación puede demandar una potencia superior a la contratada, pero en la factura se aplicarán penalizaciones o bonificaciones (mediante el cálculo de las potencias bases de facturación) en función del exceso o defecto de potencia demandada respecto a la contratada.

(2) - Término de facturación de energía (TFE)

Depende de la energía activa consumida en cada periodo tarifario.

$$TFE = \sum W_{ai} \times t_{ei}$$

- W_{ai} = energía activa consumida en el periodo i , registrada por el contador de energía activa.
- t_{ei} = precio unitario (€/kwh) de la energía en el periodo i

Para aplicación en problemas, pueden darse las potencias P_k (kw) de diversas (k) cargas, y los tiempos t_{ki} (h) de funcionamiento de una carga (k) en el periodo (i);

En este caso \Rightarrow
$$W_{ai} = \sum_1^k P_k \cdot t_{ki} \text{ (kwh)}$$

(3)- Término de facturación de energía reactiva (TFER)

$$TFER = \sum W_{rfi} \cdot t_{\text{cosp}}$$

- W_{rfi} = energía reactiva a facturar (KVArh) en el periodo (i). Es un porcentaje definido de la W_{ri} total en el periodo (i).
- t_{cosp} = precio unitario (€/KVArh) de la energía reactiva, función del f.d.p. medio en el periodo (i)

Para aplicación en problemas, pueden darse las potencias Q_k (KVA) de diversas (k) cargas, y los tiempos t_{ki} (h) de funcionamiento de una carga (k) en el periodo (i);

En este caso \Rightarrow
$$W_{ri} = \sum_1^k Q_k \cdot t_{ki} \text{ (KVArh)}$$

El f.d.p. medio en el plazo de facturación (1 ó 2 meses) para el periodo tarifario (i), se calcula a partir del triángulo de energías de dicho periodo (i):



$$\cos \phi_i = \cos \left(\arctan \frac{W_{ri}}{W_{ai}} \right)$$

B) Término de facturación del consumo de energía activa, según el precio ofertado por la comercializadora:

(4)- Término de facturación de energía consumida (TFEC)

$$TFEC = W_a \cdot C_e$$

- W_a = energía activa (kwh) total consumida
- C_e = coste unitario (€/kwh) ofertado por la comercializadora

C) OTROS TÉRMINOS DE FACTURACIÓN:

(5)- Impuesto sobre la electricidad (ISE = x%)

$$ISE = \frac{x}{100} (TFP + TFE + TFER + TFEC)$$

(6)- Alquiler de los equipos de medida (AEM)

Los equipos de medida (contador de W_a , contador de W_r , maxímetro, etc), cuando el cliente no los tiene en propiedad, los alquilan (€/aparato-mes) las comercializadoras.

(7)- Impuesto sobre el valor añadido (IVA = y%)

$$IVA = \frac{y}{100} (TFP + TFE + TFER + TFEC + ISE + AEM)$$

D) FACTURA TOTAL Y COSTE MEDIO DEL KWH:

* Factura total = $TFP + TFE + TFER + TFEC + ISE + AEM + IVA$

* Coste medio del kwh = $\frac{\text{Factura total (€)}}{W_a \text{ (kwh)}}$

Este último dato puede utilizarse a efectos estadísticos para hacer estimaciones de costes de energía eléctrica.