

Matemáticas I (GIO)	Examen global (15/01/2024)	
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:
1.º apellido: .....	<input type="text"/>	<input type="text"/>
2.º apellido: .....	<input type="text"/>	<input type="text"/>

**CUESTIONES (4 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Solo deben escribirse **LOS RESULTADOS** en los espacios consignados y solo se entregará esta hoja.

1. Sea la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Reducir  $\mathbf{A}$  a su forma canónica de Jordan, i.e. hallar sendas matrices  $\mathbf{P}$  regular y  $\mathbf{J}$  de Jordan tales que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$ .

Respuesta:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  (1 punto)

2. Se considera la aplicación lineal  $h : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  definida por

$$h(P(x)) = P(x) - (x + 1)P'(x).$$

Hallar sendas bases de  $\ker h$  y de  $\text{Im } h$ .

Respuesta:

Base de  $\ker h$ :  $(x + 1)$  (0,4 puntos)

Base de  $\text{Im } h$ :  $(1, x^2 + 2x)$  (0,4 puntos)

3. Construir una base **ortonormal** del subespacio de  $\mathbb{R}^4$  determinado por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Respuesta: P.ej.  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{22}}(4, 2, 1, 1) \right)$  (0,8 puntos)

- 
4. Diagonalícese la matriz  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ , i.e. encuentrense sendas matrices  $\mathbf{P}$  regular y  $\mathbf{D}$  diagonal tales que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ .

Respuesta:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3i & -3i \end{pmatrix}$  ;  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$  (0,6 puntos)

- 
5. Hallar todos los valores de los parámetros  $\alpha, \beta$  para los cuales el siguiente sistema es compatible, y resolver el sistema para dichos valores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Respuesta:

Valores de  $\alpha, \beta$ :  $\alpha = 4 \wedge \beta = -1$  (0,3 puntos)

Solución del sistema:  $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(-1, 1, 1) \forall \lambda \in \mathbb{R}$  (0,5 puntos)

---

Matemáticas I (GIO)	Examen global (15/01/2024)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1"> <tr> <td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**CUESTIONES (4 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Solo deben escribirse **LOS RESULTADOS** en los espacios consignados y solo se entregará esta hoja.

1. Sea la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Reducir  $\mathbf{A}$  a su forma canónica de Jordan, i.e. hallar sendas matrices  $\mathbf{P}$  regular y  $\mathbf{J}$  de Jordan tales que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$ .

Respuesta:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  (1 punto)

2. Se considera la aplicación lineal  $h : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  definida por

$$h(P(x)) = P(x) - x^2P''(x).$$

Hallar sendas bases de  $\ker h$  y de  $\text{Im } h$ .

Respuesta:

Base de  $\ker h$ :  $\emptyset$  (0,4 puntos)

Base de  $\text{Im } h$ :  $(1, x, x^2)$  (0,4 puntos)

3. Construir una base **ortonormal** del subespacio de  $\mathbb{R}^4$  determinado por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Respuesta: P.ej.  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{22}}(1, 2, 1, 4) \right)$  (0,8 puntos)

- 
4. Diagonalícese la matriz  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ , i.e. encuéntrense sendas matrices  $\mathbf{P}$  regular y  $\mathbf{D}$  diagonal tales que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ .

Respuesta:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -2i \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & -4i \end{pmatrix}$  (0,6 puntos)

- 
5. Hallar todos los valores de los parámetros  $\alpha, \beta$  para los cuales el siguiente sistema es compatible, y resolver el sistema para dichos valores:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Respuesta:

Valores de  $\alpha, \beta$ :  $\alpha = -5 \wedge \beta = -2$  (0,3 puntos)

Solución del sistema:  $(x, y, z) = (1, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1) \forall \lambda \in \mathbb{R}$  (0,5 puntos)

---

Matemáticas I (GIO)	Examen global (15/01/2024)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1"> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**PROBLEMA 1 (3 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse.

1. En el conjunto  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , se considera la matriz  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y se establece la siguiente relación:

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{M} = \mathbf{O} \text{ (matriz nula).}$$

Razónese si dicha relación es de equivalencia. (1 punto)

2. Se considera el mismo conjunto anterior con la operación producto matricial, es decir,  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \cdot)$ . Razónese si este par tiene estructura de grupo. (1 punto)

3. Se define la aplicación lineal  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , siendo  $\mathbf{A}$  la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea el subespacio de  $\mathbb{R}^4$ ,  $H = L[(2, 0, 1)]$ . Razonar si  $g^{-1}(H) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : g(\mathbf{x}) \in H\}$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^4$  y, en caso afirmativo, hallar una base del mismo. (1 punto)

**Respuesta:** (Se entregará esta hoja y, como máximo, una adicional).

1. La relación es de equivalencia ya que:

(i)  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, (\mathbf{A} - \mathbf{A})\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{A} = \mathbf{O}$ , luego  $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ .

(ii)  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{M} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{M} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$ .

(iii)  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \sim \mathbf{C} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{C})\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{M} + (\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{M} = \mathbf{O} + \mathbf{O} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}$ .

2. **No** es grupo ya que cualquier matriz no invertible (por ejemplo, la propia matriz  $\mathbf{M}$  del apartado anterior) carece de elemento simétrico respecto al producto, es decir:  $\nexists \mathbf{M}^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$  (en donde  $\mathbf{I}$  es el elemento neutro del producto matricial).

3. Los vectores de  $H$  son los de la forma  $\alpha(2, 0, 1)$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Así pues, para cada valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , debemos resolver el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ . Si lo resolvemos para  $\alpha = 1$ , encontramos las contraímagenes del vector  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

en donde podemos dejar libres  $x_3, x_4$  obteniendo la solución:

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda; \\ x_4 &= \mu; \\ x_2 &= \frac{1}{2}(1 - \lambda - 2\mu) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} - \mu; \\ x_1 &= 1 - 2\lambda - 2\mu. \end{aligned}$$

Es decir:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + \lambda \left(-2, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \mu(-2, -1, 0, 1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

El vector  $\left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$  es una solución particular del sistema, mientras que los dos últimos constituyen una base de  $\ker \mathbf{A}$ . Este conjunto de soluciones es una variedad lineal y no es subespacio vectorial. Ahora bien, por linealidad, si resolvemos para cualquier valor de  $\alpha$ , podemos tomar como solución particular

$$\alpha \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

y la solución general será

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + \lambda \left(-2, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \mu(-2, -1, 0, 1) \quad \forall \alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

conjunto que **sí** es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^4$  y como base del mismo podemos tomar

$$((2, 1, 0, 0), (4, 1, -2, 0), (2, 1, 0, -1)),$$

en donde los vectores antes obtenidos se han multiplicado por sendos escalares para simplificar el resultado.

Obsérvese que los tres vectores anteriores por fuerza han de ser linealmente independientes ya que los dos últimos son base de  $\ker \mathbf{A}$  mientras que el primero no puede pertenecer a dicho subespacio.

**Nota:** la contraímagen de un subespacio vectorial mediante una aplicación lineal **siempre** es subespacio vectorial.

Matemáticas I (GIO)	Examen global (15/01/2024)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1"> <tr> <td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**PROBLEMA 2 (3+1 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse.

Dadas dos matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ , se sabe que los autovalores **no nulos** de  $\mathbf{AB}$  coinciden con los de  $\mathbf{BA}$ .

Este resultado —sin demostrarlo— podrá utilizarse a lo largo del ejercicio.

Sea la matriz  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Sin efectuar el producto, hallar una base de  $\ker \mathbf{M}$  y otra de  $\text{Im } \mathbf{M}$ . (1 punto)
2. Sin efectuar el producto, calcular los autovalores de  $\mathbf{M}$  con sus respectivas multiplicidades algebraicas y geométricas. (1 punto)
3. Diagonalizar la matriz  $\mathbf{M}$ , i.e. hallar una matriz  $\mathbf{P}$  regular y una matriz  $\mathbf{D}$  diagonal tales que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ . (1 punto)
4. (Pregunta extra para obtener un punto adicional.) Demostrar el resultado que figura en el encabezamiento. (1 punto)

**Respuesta:** (Se entregará esta hoja y, como máximo, una adicional).

1. Llamamos  $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$  siendo  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  los dos factores del enunciado.

$\text{Im } \mathbf{M}$  está generada por las columnas de  $\mathbf{M}$  que, a su vez, están generadas por las de  $\mathbf{A}$ ; como al premultiplicar por una matriz de columnas linealmente independientes se conserva el rango del segundo factor, resulta evidente que  $\dim(\text{Im } \mathbf{M}) = r(\mathbf{M}) = 2$ , con lo que como base de este subespacio podemos tomar las dos columnas de  $\mathbf{A}$ :

$$\text{Base de Im } \mathbf{M} : ((1, -2, 3, 0), (1, 1, 1, 1)).$$

Las ecuaciones de  $\ker \mathbf{M}$  están determinadas por las filas de esta matriz, que a su vez están generadas por las de  $\mathbf{B}$  y, por lo ya observado acerca del rango,  $\ker \mathbf{M}$  tiene las dos ecuaciones independientes que proporcionan las filas de  $\mathbf{B}$ , que pasamos a resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos dejar libres  $x_3 = \lambda$ ,  $x_4 = \mu$ , obteniendo  $x_2 = -\mu$ ,  $x_1 = x_2 - x_3 = -\lambda - \mu$ , es decir:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(-1, 0, 1, 0) + \mu(-1, -1, 0, 1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En conclusión, podemos tomar:

$$\text{Base de } \ker \mathbf{M} : ((1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1)).$$

2. Puesto que  $\dim(\ker \mathbf{M}) = 2$ , sabemos que  $\mathbf{M}$  tiene el autovalor 0 con multiplicidad algebraica mayor o igual que 2. Para calcular los autovalores no nulos, utilizamos el resultado del encabezamiento y calculamos los autovalores de

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como los elementos de cada fila de esta matriz suman 7, este valor es uno de sus autovalores; como su traza vale 9, el autovalor restante será  $9 - 7 = 2$ .

En conclusión, los autovalores de  $\mathbf{M}$  son 0 (doble), 2 y 7 (simples), siendo las multiplicidades geométricas iguales a las algebraicas (ya que, en el caso del autovalor doble, la dimensión del subespacio propio que es el núcleo de la matriz también es igual a 2).

3. En el apartado 1 ya hemos hallado una base del subespacio propio asociado al autovalor doble 0. Para hallar autovectores asociados a los autovalores simples, utilizaremos la expresión explícita de la matriz  $\mathbf{M}$  efectuando el producto:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \lambda = 2 : \ker(\mathbf{M} - 2\mathbf{I}) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = L \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda = 7 : \ker(\mathbf{M} - 7\mathbf{I}) &= \ker \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 25 \end{pmatrix} = \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = L \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

En conclusión, tomando  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , se tiene que  $\mathbf{P}$  es regular y

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \text{diag}(0, 0, 2, 7).$$

4. Sea  $\lambda \neq 0$  autovalor de la matriz  $\mathbf{AB}$ , sea  $\mathbf{u}$  autovector asociado al mismo ( $\Rightarrow \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ):  $\mathbf{ABu} = \lambda\mathbf{u}$ .

Entonces, premultiplicando por la matriz  $\mathbf{B}$ , tenemos:

$$(\mathbf{BA})\mathbf{Bu} = \mathbf{B}(\mathbf{ABu}) = \mathbf{B}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{Bu},$$

Como  $\mathbf{Bu} \neq \mathbf{0}$  (pues, en caso contrario, sería  $\mathbf{ABu} = \mathbf{0}$ ), se concluye que  $\mathbf{Bu}$  es autovector de  $\mathbf{BA}$  asociado al autovalor  $\lambda$  y, por consiguiente,  $\lambda$  también es autovalor de  $\mathbf{BA}$ .