

Matemáticas I (GIO) (Curso 2023/24)	Convocatoria extraordinaria (3/07/2024)	
Nombre: .....	Nº de matrícula:	Calificación:
1 <sup>er</sup> apellido: .....		
2º apellido: .....		

**CUESTIONES (3 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Solo deben escribirse los resultados en los recuadros correspondientes. Solo se entregará esta hoja.

1. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -4 \\ 5 & -6 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Reducir  $A$  a su forma canónica de Jordan, i.e. hallar sendas matrices  $P$  regular y  $J$  de Jordan tales que  $P^{-1}AP = J$ .

Respuesta:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (1 punto)

2. Construir una base **ortonormal** del subespacio de  $\mathbb{R}^4$  determinado por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Respuesta:  $\left( \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, 1, 1) \right)$  (0,8 puntos)

3. Se considera la aplicación lineal  $h : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  definida por

$$h(P(x)) = P(x) - (\alpha x + \beta)P'(x),$$

en donde  $\alpha, \beta$  son parámetros reales.

a) Construir la matriz de  $h$  respecto a la base  $(1, x, x^2)$ . Respuesta:  $\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & -2\beta \\ 0 & 0 & 1 - 2\alpha \end{pmatrix}$   
(0,8 puntos)

b) Hallar todos los valores de  $\alpha, \beta$  para los cuales  $h$  es biyectiva.

Respuesta:  $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq \frac{1}{2}, \forall \beta$  (0,4 puntos)

Matemáticas I (GIO) (Curso 2023/24)	Convocatoria extraordinaria (3/07/2024)	
Nombre: .....	Nº de matrícula:	Calificación:
1 <sup>er</sup> apellido: .....		
2º apellido: .....		

**PROBLEMA 1 (4 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse o no se considerarán válidos.

Sean las matrices

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Hallar una base de  $\ker \mathbf{M}$  y unas ecuaciones implícitas de  $\text{Im } \mathbf{A}$ . ¿Qué relación existe entre estos dos subespacios? (1,5 puntos)
- Encontrar el conjunto de todos los vectores  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  que satisfacen que  $\mathbf{Ax} \in \ker \mathbf{M}$ . En caso de que este conjunto tenga estructura de subespacio vectorial, construir una base del mismo. (1 punto)
- Encontrar todos los vectores  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$  para los que el sistema  $\mathbf{MAx} = \mathbf{b}$  es compatible. En caso de que dichos vectores formen un subespacio vectorial, construir una base del mismo. (1 punto)
- Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Razonar la relación que deben cumplir los subespacios

$$\ker \mathbf{A}, \text{Im } \mathbf{A}, \ker \mathbf{M}, \text{Im } \mathbf{M}$$

para que el sistema lineal  $\mathbf{MAx} = \mathbf{b}$  sea incompatible para todo  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  **no nulo** (la relación **no** tiene por qué involucrar a **todos** los subespacios). (0,5 puntos)

**Respuesta:** (Se entregará esta hoja y, como máximo, dos adicionales).

1. Empezamos hallando  $\ker \mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos dejar libres  $x_3 = \lambda, x_4 = \mu$ , de donde  $x_2 = -\lambda + \mu$  y  $x_1 = \lambda - \mu$ . El vector genérico de  $\ker \mathbf{M}$  es  $(\lambda - \mu, -\lambda + \mu, \lambda, \mu)$  y una base de dicho subespacio es, por ejemplo,  $\boxed{((1, -1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))}$ .

Buscamos ahora una base de  $\text{Im } \mathbf{A}$  para, a través de las ecuaciones implícitas, llegar a las paramétricas. Empezamos aplicando reducción gaussiana a las columnas de  $\mathbf{A}$ , que generan dicho subespacio y por comodidad escribimos como filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las tres filas obtenidas constituyen una base sencilla de  $\text{Im } \mathbf{A}$ , cuya dimensión por tanto es 3 y estará caracterizada por una única ecuación implícita. Dicha base nos proporciona las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= \beta \\ x_3 &= -\beta + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = x_2 + x_3 \\ x_4 &= \alpha + \beta + \gamma \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación implícita de  $\text{Im } \mathbf{A}$  es  $\boxed{x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0}$ .

Ahora observamos que esta ecuación la verifican los dos vectores obtenidos antes como base de  $\ker \mathbf{M}$ . En consecuencia, la relación entre ambos subespacios es  $\boxed{\ker \mathbf{M} \subset \text{Im } \mathbf{A}}$ .

2.  $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \ker \mathbf{M} \Leftrightarrow \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \ker(\mathbf{M}\mathbf{A})$ . Por consiguiente, los vectores pedidos son los de  $\ker(\mathbf{M}\mathbf{A})$ , que naturalmente es un subespacio vectorial. Calculamos explícitamente la matriz producto:

$$\mathbf{M}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de rango 1 cuyo núcleo está caracterizado por la única ecuación  $x_2 + x_4 = 0$  y tiene por tanto dimensión 3. Una base del mismo estará caracterizada por cualesquiera 3 vectores linealmente independientes que cumplan dicha condición, por ejemplo

$$\boxed{((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0))}.$$

Los vectores que satisfacen la condición del enunciado son, por lo tanto,

$$\boxed{\{(\alpha, \beta, \gamma, -\beta) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}}.$$

3. Un sistema es compatible si y solo si el vector de términos independientes pertenece al subespacio columna —o imagen— de la matriz de coeficientes, que naturalmente es subespacio vectorial.

En nuestro caso,  $\text{Im}(\mathbf{M}\mathbf{A})$  —cuya dimensión es 1— tiene por base  $\boxed{\left( \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t \right)}$ .

Los vectores  $\mathbf{b}$  que hacen el sistema compatible son los de la forma  $\boxed{\left( 2\lambda \quad -\lambda \quad 3\lambda \quad \lambda \right)^t \forall \lambda \in \mathbb{R}}$ .

4. El sistema será incompatible para todo  $\mathbf{b}$  no nulo si no existe ningún vector distinto del nulo que pertenezca a  $\text{Im}(\mathbf{M}\mathbf{A})$ , es decir, si  $\text{Im}(\mathbf{M}\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ . Esto solo sucede cuando  $\mathbf{M}\mathbf{A}$  es la matriz nula.

Ello equivale a que al multiplicar  $\mathbf{M}$  por cada una de las columnas de  $\mathbf{A}$  se obtiene el vector nulo, es decir, las columnas de  $\mathbf{A}$  pertenecen a  $\ker \mathbf{M}$ .

Como dichas columnas generan  $\text{Im } \mathbf{A}$ , la relación buscada es  $\boxed{\text{Im } \mathbf{A} \subset \ker \mathbf{M}}$ .

Matemáticas I (GIO) (Curso 2023/24)	Convocatoria extraordinaria (3/07/2024)		
Nombre: .....	Nº de matrícula:	Calificación:	
1 <sup>er</sup> apellido: .....			
2º apellido: .....			

**PROBLEMA 2 (3 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse o no se considerarán válidos.

1. Sea  $\mathcal{I}$  el conjunto de los intervalos de la recta real de la forma  $[m, n]$ , con  $n, m$  enteros y  $m < n$ . En  $\mathcal{I}$  definimos la siguiente relación:

$$\forall A, B \in \mathcal{I}, A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Razónese si dicha relación es de equivalencia. En caso afirmativo, describase el conjunto cociente. (1 punto)

2. Se considera la matriz  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ \beta & 2\beta & -\beta & -2\beta \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ , en donde  $\beta$  es un parámetro real.

- a) Calcular razonadamente los valores de  $\beta$  que hacen que  $\mathbf{B}$  sea diagonalizable. (0,8 puntos)  
b) Para esos valores, diagonalizar  $\mathbf{B}$  en función de  $\beta$ . (1,2 puntos)

**Respuesta:** (Se entregará esta hoja y, como máximo, una adicional).

1. La relación **NO** es de equivalencia ya que no se cumple la propiedad transitiva.

Por ejemplo:

$$[0, 2] \sim [1, 4], [1, 4] \sim [3, 5], \text{ pero } [0, 2] \text{ no se relaciona con } [3, 5] \text{ ya que } [0, 2] \cap [3, 5] = \emptyset.$$

2. a) Es evidente que, cualquiera que sea el valor de  $\beta$ ,  $r(\mathbf{B}) = 1$ , es decir,  $\dim(\ker \mathbf{B}) = 3$  y por tanto  $\mathbf{B}$  tiene a 0 como autovalor al menos triple; la dimensión del subespacio propio asociado (i.e.  $\ker \mathbf{B}$ ) es 3 en cualquier caso.

Deducimos de la traza de la matriz el autovalor restante. En efecto,  $0 + 0 + 0 + \lambda_4 = \text{tr}(\mathbf{B}) = 1 - 2 - \beta - 4 = -\beta - 5$ ; por consiguiente, si  $\beta \neq -5$ , tenemos un autovalor no nulo, con lo que la multiplicidad del 0 es 3, igual a la dimensión del subespacio propio, y la matriz será diagonalizable. Por el contrario, si  $\beta = -5$ , el 0 será el único autovalor (cuádruple) de la matriz y esta no podrá diagonalizarse.

En conclusión,  $\mathbf{B}$  es diagonalizable  $\Leftrightarrow \beta \neq -5$ .

- b) Suponemos por tanto que  $\beta \neq -5$ . Tenemos los autovalores 0 (triple) y  $-\beta - 5$  (simple). En cuanto al 0, tenemos que encontrar tres vectores propios  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  linealmente independientes asociados a él, es decir, una base del núcleo, el cual viene definido por la única ecuación

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0.$$

Tomamos, por ejemplo,  $\mathbf{p}_1 = (2, -1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (0, 1, 2, 0)$ ,  $\mathbf{p}_3 = (0, 0, 2, -1)$ .

En cuanto al autovalor no nulo  $-\beta - 5$ , todo vector propio  $\mathbf{p}_4$  asociado a él tiene que pertenecer a  $\text{Im } \mathbf{B}$ , la cual está generada por cualquier columna de  $\mathbf{B}$ ; tomamos por tanto  $\mathbf{p}_4 = (1, -1, \beta, 2)$ .

En conclusión, si escribimos los 4 vectores anteriores como columnas de una matriz  $\mathbf{P}$ , esta será invertible y diagonalizará la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \text{diag}(0, 0, 0, -\beta - 5).$$