

Matemáticas I (GIO)	Examen global (17/01/2025)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1"> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**CUESTIONES (3 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Solo deben escribirse **LOS RESULTADOS** en los espacios consignados y solo se entregará esta hoja.

1. Sea la matriz simétrica  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Diagonalizar ortogonalmente  $\mathbf{A}$ , i.e. hallar sendas matrices  $\mathbf{Q}$  ortogonal y  $\mathbf{D}$  diagonal tales que  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$ .

Respuesta:  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  ;  $\mathbf{D} = \text{diag}(4, -2, -2)$  (1,2 puntos)

2. En el espacio  $\mathbb{R}_3[x]$ , hallar la tercera columna de la matriz de cambio de base de  $(1, x - 3, (x - 3)^2, (x - 3)^3)$  a  $(1, x, x^2, x^3)$ .

Respuesta:  $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$  (0,6 puntos)

3. Se considera la aplicación lineal  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  caracterizada por:

$$h(1, 1, -1) = (1, -2, 1, 0) ; h(1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1) ; h(0, 1, 0) = (1, 4, 1, 2).$$

a) Hallar una base de  $\ker h$ .

Respuesta:  $((1, 0, 3))$  (0,6 puntos)

b) Calcular la tercera columna de la matriz de  $g$  respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ .

Respuesta:  $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$  (0,6 puntos)

Matemáticas I (GIO)	Examen global (17/01/2025)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1"> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**CUESTIONES (3 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Solo deben escribirse **LOS RESULTADOS** en los espacios consignados y solo se entregará esta hoja.

1. Sea la matriz simétrica  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Diagonalizar ortogonalmente  $A$ , i.e. hallar sendas matrices  $Q$  ortogonal y  $D$  diagonal tales que  $Q^{-1}AQ = D$ .

Respuesta:  $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  ;  $D = \text{diag}(3, -3, -3)$  (1,2 puntos)

2. En el espacio  $\mathbb{R}_3[x]$ , hallar la tercera columna de la matriz de cambio de base de  $(1, x + 2, (x + 2)^2, (x + 2)^3)$  a  $(1, x, x^2, x^3)$ .

Respuesta:  $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$  (0,6 puntos)

3. Se considera la aplicación lineal  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  caracterizada por:

$$h(1, 1, -1) = (1, -2, 1, 0) ; h(1, 1, 1) = (1, 4, 1, 2) ; h(0, 1, 0) = (1, 1, 1, 1).$$

a) Hallar una base de  $\ker h$ .

Respuesta:  $\left( (1, 0, 0) \right)$  (0,6 puntos)

b) Calcular la tercera columna de la matriz de  $g$  respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ .

Respuesta:  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$  (0,6 puntos)

Matemáticas I (GIO)	Examen global (17/01/2025)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**PROBLEMA 1 (3,5 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse.

Se consideran la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

y los vectores

$$\mathbf{b} = (3, -1, 2, 0)^t, \quad \mathbf{v} = (0, -1, 1, 1)^t.$$

1. Para cada uno de los sistemas lineales  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ , razonar si tienen o no solución y, en caso afirmativo, hallar todas sus soluciones. (1,5 puntos)

2. Sea  $g : E \rightarrow F$  una aplicación lineal entre espacios vectoriales, y sea  $H$  un subespacio vectorial de  $F$ .

Se considera  $g^{-1}(H) := \{\mathbf{x} \in E : g(\mathbf{x}) \in H\}$  (i.e. la **contraimagen** de  $H$  mediante  $g$ ).

Demostrar que  $g^{-1}(H)$  es subespacio vectorial de  $E$ . (1 punto)

3. Sea ahora  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la aplicación lineal determinada por la matriz  $\mathbf{A}$ . Hallar una base del subespacio

$$g^{-1}(L[\mathbf{b}, \mathbf{v}]).$$

(1 punto)

**Respuesta:** (Se entregará esta hoja y, como máximo, una adicional).

1. Puesto que los dos sistemas comparten matriz de coeficientes, plantearemos simultáneamente el estudio y resolución de ambos, escribiendo la matriz  $(\mathbf{A}|\mathbf{b} \ \mathbf{v})$  y efectuando operaciones gaussianas por filas:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -6 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Puesto que  $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = 2$  mientras que  $r(\mathbf{A}|\mathbf{v}) = 3$ , concluimos que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene infinitas soluciones que dependen de  $4 - 2 = 2$  parámetros, mientras que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$  no tiene solución.

Pasamos a resolver el primer sistema con la matriz

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Dejando libres las dos últimas incógnitas,  $x_3 = \lambda$ ,  $x_4 = \mu$ , obtenemos  $x_2 = 2 + \lambda - \mu$  y  $x_1 = 3 - (2 + \lambda - \mu) - \lambda = 1 - 2\lambda + \mu$ .

Así pues, el conjunto de soluciones de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 1, 0) + \mu(1, -1, 0, 1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Emplearemos la caracterización de los subespacios vectoriales:

- $\mathbf{0}_E \in f^{-1}(H)$  ya que  $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F \in H$  al ser este subespacio.
- Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(H)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Como  $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \in H$ , entonces  $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \in H$  pues es combinación lineal de vectores de  $H$ ; luego  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in f^{-1}(H)$ .

3.  $g^{-1}(L[\mathbf{b}, \mathbf{v}])$  está formado por los vectores que, mediante  $\mathbf{A}$ , se transforman en combinaciones lineales de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{v}$ . Por linealidad, coinciden con las combinaciones lineales de los  $\mathbf{x}$  tales que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  y los  $\mathbf{y}$  tales que  $\mathbf{Ay} = \mathbf{v}$ . Pero, como hemos visto, el segundo sistema no aporta ninguna solución, así que nos quedan únicamente las combinaciones lineales de soluciones de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Estos últimos son los vectores de la forma  $\alpha((1, 2, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 1, 0) + \mu(1, -1, 0, 1))$ ; como  $\alpha, \lambda, \mu$  son parámetros independientes que recorren todos los números reales, es lo mismo que escribir

$$g^{-1}(L[\mathbf{b}, \mathbf{v}]) = \{\alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(-2, 1, 1, 0) + \gamma(1, -1, 0, 1) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Esos tres vectores por fuerza han de ser linealmente independientes ya que los dos últimos constituyen una base de  $\ker \mathbf{A}$ , mientras que el primero es una solución particular del sistema completo y por tanto no pertenece a dicho núcleo. En conclusión, una base de  $g^{-1}(L[\mathbf{b}, \mathbf{v}])$  es

$$((1, 2, 0, 0), (-2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)).$$

Matemáticas I (GIO)	Examen global (17/01/2025)						
Nombre: .....	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido: .....	<table border="1"> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido: .....							

**PROBLEMA 2 (3,5 puntos)**

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse.

Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2 \ \alpha) ; \mathbf{B} = \mathbf{A} + \beta \mathbf{I} , \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Construir, en función de  $\alpha$ , sendas bases de  $\ker \mathbf{A}$  e  $\text{Im } \mathbf{A}$ . (1 punto)
2. Hallar los valores de  $\alpha$  para los que  $\mathbf{A}$  es diagonalizable. (1 punto)
3. Razonar si existe algún valor de  $\beta$  con el cual  $\mathbf{B}$  es diagonalizable **para todo**  $\alpha \in \mathbb{R}$ . En caso afirmativo, hallar dicho valor de  $\beta$ . (0,5 puntos)
4. Para  $\alpha = \beta = 1$ , diagonalizar la matriz  $\mathbf{B}$ , i.e. hallar una matriz  $\mathbf{P}$  regular y una matriz  $\mathbf{D}$  diagonal tales que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ . (1 punto)

**Respuesta:** (Se entregará esta hoja y, como máximo, una adicional).

1.  $r(\mathbf{A}) = 1$  y sus columnas son proporcionales a  $(1, 2, 2, -1)^t$ , constituyendo por tanto dicho vector una base de la imagen:  $\mathcal{B}_{\text{Im } \mathbf{A}} = ((1, 2, 2, -1))$ .

Las filas de  $\mathbf{A}$  son proporcionales al vector  $(1, 0, -2, \alpha)$  y la única ecuación de su núcleo (que tendrá dimensión 3) es  $x_1 - 2x_3 + \alpha x_4 = 0$ . Tenemos que tomar 3 vectores linealmente independientes que verifiquen dicha ecuación.

Obviamente podemos tomar  $(0, 1, 0, 0)$  ya que la segunda componente no interviene; además, tomando solo dos componentes no nulas, podemos escoger los vectores  $(2, 0, 1, 0)$  y  $(-\alpha, 0, 0, 1)$  y los tres vectores elegidos son linealmente independientes, luego tenemos la base:

$$\mathcal{B}_{\ker \mathbf{A}} = ((0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-\alpha, 0, 0, 1)).$$

2.  $\dim(\ker \mathbf{A}) = 3 \Rightarrow \mathbf{A}$  tiene el autovalor 0 con multiplicidad algebraica **al menos** igual a 3. El autovalor restante vendrá dado por la traza de  $\mathbf{A}$  o, lo que es lo mismo, el producto

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = (1 \ 0 \ -2 \ \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 - \alpha.$$

Cuando este valor sea 0, el nulo será el único autovalor de  $\mathbf{A}$  y esta no podrá ser diagonalizable. Por el contrario, si  $\text{tr}(\mathbf{A}) \neq 0$ , habrá un autovalor simple no nulo, la multiplicidad algebraica del autovalor 0 será 3, igual a la dimensión de  $\ker \mathbf{A}$ , y la matriz será diagonalizable.

En conclusión,  $\boxed{\mathbf{A} \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow \alpha \neq -3.}$

3. Cualquiera que sea  $\beta$ , los autovectores de  $\mathbf{B}$  son los mismos que los de  $\mathbf{A}$ . Por tanto, **una de las matrices es diagonalizable si y solo si lo es la otra**; como  $\mathbf{A}$  no lo es para  $\alpha = -3$ ,  $\boxed{\text{no puede existir ningún valor de } \beta}$  que haga que  $\mathbf{B}$  sea diagonalizable para todos los  $\alpha$ .
4. Para  $\alpha = \beta = 1$ , tenemos  $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{I}$  y los autovalores de  $\mathbf{B}$ , resultantes de sumarles 1 a los de  $\mathbf{A}$ , son 1 triple y  $-\alpha - 3 + 1 = -3$  simple.

La base de  $\ker(\mathbf{B} - \mathbf{I})$  es la del núcleo de  $\mathbf{A}$  que ya hemos hallado, con  $\alpha = 1$ :

$$\ker(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = L[(0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)].$$

En cuanto a  $\ker(\mathbf{B} + 3\mathbf{I})$ , sus vectores son los asociados al autovalor no nulo (en este caso  $-4$ ) de la matriz  $\mathbf{A}$ , que son asimismo los vectores de la imagen de  $\mathbf{A}$ ; por tanto

$$\ker(\mathbf{B} + 3\mathbf{I}) = L[(1, 2, 2, -1)].$$

Recapitulando, si tomamos  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}$  es invertible y

$$\boxed{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, 1, -3).}$$