

Matemáticas I (GIO)	Examen extraordinario (3/07/2025)						
Nombre:	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido:	<table border="1"> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido:							

CUESTIONES (3 puntos)

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Solo deben escribirse **LOS RESULTADOS** en los espacios consignados y solo se entregará esta hoja.

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Reducir A a su forma canónica de Jordan, i.e. hallar sendas matrices P regular y J de Jordan tales que $P^{-1}AP = J$.

Respuesta: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (1 punto)

2. Dada la función

$$\frac{-x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

definida sobre $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, hallar su valor mínimo así como los vectores en los que se alcanza.

Respuesta: (0,6 puntos)

Mín. = -2 ; se alcanza en $\alpha(1, -1, 0) + \beta(2, 0, -1) \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

3. Hallar el vector de coordenadas de $(0, 8, 101, 2)$ respecto a la base de \mathbb{R}^4

$$((1, 2, 0, -1), (1, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)).$$

Respuesta:

$(2, -3, 101, 1)$ (0,5 puntos)

-
4. a) Hallar los valores de α y β que hacen compatible el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \alpha \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Respuesta:

$$\alpha = -2 \wedge \beta = 0$$

(0,4 puntos)

- b) Para esos valores, hallar todas las soluciones del sistema.

Respuesta:

$$(1, -2, 0) + \lambda(-2, -1, 1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(0,5 puntos)

Matemáticas I (GIO)	Examen extraordinario (3/07/2025)						
Nombre:	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido:	<table border="1"> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido:							

PROBLEMA 1 (4 puntos)

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse.

1. En el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, se considera la siguiente relación:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Leftrightarrow r(\mathbf{A} - \mathbf{B}) < 2.$$

Razonar rigurosamente si dicha relación es de equivalencia. En caso afirmativo, construir el conjunto cociente. (1 punto)

2. Se consideran las expresiones:

$$g(1, -1, 0) = (1, -1, 1, 1); \quad g(1, 1, 0) = (1, 1, -1, 1);$$

$$g(0, 0, 1) = (3, 1, -1, 3); \quad g(1, 0, 1) = (a, b, c, d).$$

Hallar los valores de a, b, c, d para los cuales las expresiones anteriores definen una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. (0,5 puntos)

3. Hallar una base de $\ker g$ y unas ecuaciones implícitas de $\text{Im } g$. (1 punto)
4. Hallar el conjunto de todos los vectores \mathbf{u} tales que $g(\mathbf{u}) \in L[(5, -1, 1, 5)]$. Razonar si dicho conjunto es subespacio vectorial y, en caso afirmativo, hallar una base del mismo. (1,5 puntos)

Respuesta: (Se entregará esta hoja y, como máximo, dos adicionales).

1. Sean, por ejemplo, las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ya que $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$ ya que $\mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Sin embargo, $\mathbf{A} \not\sim \mathbf{C}$ ya que $\mathbf{A} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego no se cumple la propiedad transitiva y, por tanto, la relación no es de equivalencia.

2. Como se aprecia a simple vista, los tres primeros vectores que se transforman mediante g constituyen una base de \mathbb{R}^3 y, por tanto, sus imágenes determinan la aplicación lineal g .

El cuarto vector es necesariamente combinación lineal de los tres primeros y su imagen ha de ser la misma combinación lineal de las imágenes de aquellos, para que se satisfaga la condición de linealidad; de lo contrario, g no podría ser lineal.

Expresamos dicho vector como combinación lineal de los anteriores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema: la tercera ecuación nos proporciona $\gamma = 1$ y nos quedan las ecuaciones $\alpha + \beta = 1$, $-\alpha + \beta = 0$, cuya inmediata resolución nos da $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

En definitiva, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} g(1, 0, 1) &= \frac{1}{2}g(1, -1, 0) + \frac{1}{2}g(1, 1, 0) + g(0, 0, 1) = \\ &= \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1) + (3, 1, -1, 3) = (4, 1, -1, 4), \end{aligned}$$

es decir, $\boxed{(a, b, c, d) = (4, 1, -1, 4)}$.

3. Para hallar los vectores del núcleo, expresamos un vector genérico de \mathbb{R}^3 como combinación lineal de los vectores de la base antes mencionada y forzamos que su imagen mediante g sea $\mathbf{0}$.

$$g\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que nos da que $\beta = -2\gamma$ y $\alpha = \gamma$. El vector genérico del núcleo queda, por tanto,

$$-\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con lo que una base de $\ker g$ es $\boxed{((-3, -1, 1))}$.

Puesto que $\dim(\ker g) = 1$, ahora sabemos que $\dim(\text{Im } g) = 3 - 1 = 2$; las tres imágenes de los vectores de la base de \mathbb{R}^3 constituyen un sistema generador de $\text{Im } g$ y dos cualesquiera de ellos linealmente independientes, una base; por ejemplo, los dos primeros

$$((1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1)).$$

Con estos vectores, escribimos las ecuaciones implícitas de este subespacio y eliminamos los parámetros:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = \lambda - \mu \\ x_4 = \lambda + \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

con lo que unas ecuaciones implícitas de $\text{Im } g$ son

$$\boxed{x_1 - x_4 = 0 ; x_2 + x_3 = 0.}$$

4. Resolvemos primero $g(\mathbf{x}) = (5, -1, 1, 5)$. Como $g(1, -1, 0)$ y $g(1, 1, 0)$ generan $\text{Im } g$, podemos encontrar una solución a partir de estos dos vectores, resolviendo:

$$\alpha g(1, -1, 0) + \beta g(1, 1, 0) = (5, -1, 1, 5),$$

es decir:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

que nos da como solución $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

En consecuencia, el vector $\mathbf{x} = 3(1, -1, 0) + 2(1, 1, 0) = (5, -1, 0)$ verifica que $g(\mathbf{x}) = (5, -1, 1, 5)$. Por tanto, todos los vectores cuya imagen es $(5, -1, 1, 5)$ son los de la variedad lineal $\mathbf{x} + \ker g$, es decir, $\{(5, -1, 0) + \lambda(-3, -1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ahora bien, se trata de encontrar los vectores que se transforman en cualquier vector de $L[(5, -1, 1, 5)]$, que son los proporcionales a los obtenidos, es decir:

$$\{\mu((5, -1, 0) + \lambda(-3, -1, 1)) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\{\alpha(5, -1, 0) + \beta(-3, -1, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \boxed{L[(5, -1, 0), (-3, -1, 1)]}$$

conjunto que naturalmente es un subespacio vectorial de dimensión 2 y tiene por base

$$\boxed{((5, -1, 0), (-3, -1, 1))}.$$

Matemáticas I (GIO)	Examen extraordinario (3/07/2025)						
Nombre:	N.º de matrícula:	Calificación:					
1.º apellido:	<table border="1"> <tr> <td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td> </tr> </table>						
2.º apellido:							

PROBLEMA 2 (3 puntos)

Deben escribirse todas las respuestas con tinta indeleble; lo escrito a lápiz no será corregido.

Todos los resultados tienen que razonarse.

1. Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Se considera la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$. Razonar rigurosamente la relación entre los autovalores y autovectores de \mathbf{A} y los de \mathbf{B} . Expresar también $\chi_{\mathbf{B}}(\lambda)$ (polinomio característico de \mathbf{B}) en función de $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$. (1,2 puntos)

2. Sea ahora la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 4\mathbf{I}.$$

Razonar si \mathbf{B} es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, diagonalizarla, es decir, hallar sendas matrices \mathbf{P} regular y \mathbf{D} diagonal tales que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{D}$. (1,8 puntos)

Respuesta: (Se entregará esta hoja y, como máximo, dos adicionales).

1. $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{u} = (\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \alpha\mathbf{I}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} = (\lambda + \alpha)\mathbf{u}$. Es decir:
- $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de $\mathbf{A} \Leftrightarrow \lambda + \alpha$ lo es de \mathbf{B} (con los mismos autovectores).
 - $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ es autovector de \mathbf{A} (asociado a λ) \Leftrightarrow lo es de \mathbf{B} (asociado a $\lambda + \alpha$).

Observación: Esto garantiza que \mathbf{B} es diagonalizable si y solo si \mathbf{A} lo es.

En cuanto a los polinomios característicos:

$$\boxed{\chi_{\mathbf{B}}(\lambda)} = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = |\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})| = |(\lambda - \alpha)\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \boxed{\chi_{\mathbf{A}}(\lambda - \alpha)}.$$

2. La matriz \mathbf{B} será diagonalizable si y solo si lo es el primer sumando, que es una matriz de rango 1 que llamaremos \mathbf{A} . Esta tiene el autovalor 0 al menos triple, cuyos autovectores son los vectores no nulos pertenecientes a $\ker \mathbf{A} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. El autovalor restante vendrá dado por $\text{tr } \mathbf{A} = 1 - 2 + 2 + 2 = 3 \neq 0$, luego la multiplicidad del autovalor 0 es 3 al igual que $\dim(\ker \mathbf{A})$; en consecuencia, \mathbf{A} es diagonalizable y por lo tanto también lo es \mathbf{B} .

Los autovalores de \mathbf{B} son los resultantes de sumarle -4 a los de \mathbf{A} , es decir, -4 triple y -1 simple. Los autovectores y por ende los subespacios propios son los mismos.

Hallamos 3 vectores linealmente independientes pertenecientes a $\ker \mathbf{A}$ (es decir, autovectores de \mathbf{B} asociados al autovalor -4):

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.$$

Tomamos, por ejemplo, $\mathbf{P}_1 = (2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{P}_3 = (2, 0, 0, -1)$.

En cuanto al autovector de \mathbf{A} asociado al 3 (i.e. autovector de \mathbf{B} asociado al -1), tiene que tratarse de un vector de $\text{Im } \mathbf{A} = L[(1, 1, -2, 1)]$, así que podemos tomar $\mathbf{P}_4 = (1, 1, -2, 1)$.

En conclusión: tomando $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, \mathbf{P} es regular y

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \text{diag}(-3, -3, -3, -1).$$